



Simulation d'événements rares par Monte Carlo dans les réseaux hautement fiables

Samira Saggadi

► To cite this version:

Samira Saggadi. Simulation d'événements rares par Monte Carlo dans les réseaux hautement fiables. Modélisation et simulation. Université Rennes 1, 2013. Français. NNT : . tel-00940140

HAL Id: tel-00940140

<https://theses.hal.science/tel-00940140>

Submitted on 31 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Informatique

École doctorale Matisse

présentée par

Samira SAGGADI-SIFODIL

préparée à l'unité de recherche IRISA – UMR6074
Institut de Recherche en Informatique et Système
Aléatoires Composante Universitaire (par. ex. IFSIC)

**Simulation d'évé-
nements rares par
Monte Carlo dans
les réseaux haute-
ment fiables**

**Thèse soutenue à Rennes
le/../..**

devant le jury composé de :

Mr HECTOR CANCELA

Professeur de l'université de la république uruguay /
Rapporteur

Mr NIKOLAOS LIMNIOS

Professeur de l'université de Compiègne /
Rapporteur

Mr

... / *Examineur*

Mr MOHAMED EL-KHADIRI

Maître de conférences à l'université de Nantes /
Examineur

Mr GERARDO RUBINO

Directeur de recherche INRIA de Rennes /
Examineur

Mr BRUNO TUFFIN

Chargé de recherche INRIA de Rennes /
Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Gérardo Rubino, Directeur de Recherche INRIA de Rennes pour m'avoir accueilli au sein de son équipe mais également pour sa participation au jury.

Je remercie aussi mon directeur de thèse Monsieur Bruno Tuffin, Chargé de Recherche INRIA de Rennes pour m'avoir encadrée, conseillée ainsi que pour ses corrections de ce mémoire. Je lui suis reconnaissante pour la confiance, la sympathie et le soutien qu'il m'a apporté. Je le salue tout particulièrement pour ses qualités humaines et scientifiques.

Je remercie cordialement M. Hector Cancela, Professeur de l'université de la république uruguay et M. Nikolaos Limnios, Professeur de l'université de Compiègne d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je souhaite adresser également mes remerciements à M. Mohamed El-Khadiri, Maître de conférences à l'université de Nantes et M. ***, **** à l'université de ****, d'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail.

Remerciements particuliers à ceux qui m'ont soutenue durant la thèse et même depuis bien plus longtemps : mes parents, mes sœurs, mes frères, mon beau-frère Pascal et ses parents, pour leur amour, leur soutien sans faille et à tout ce qu'ils ont pu m'apporter pour franchir les obstacles les plus difficiles.

Un dernier merci, un des plus importants, à Brahim mon mari pour son soutien sans relâche durant ces années de thèse.

Table des matières

Table des matières	2
1 Introduction générale	11
1.1 Introduction	11
1.2 Définitions	12
1.2.1 Les réseaux	12
1.2.2 La fiabilité	12
1.2.3 Notions de base sur les graphes	13
1.2.3.1 Adjacence	13
1.2.3.2 Sous-graphes	13
1.2.3.3 Connexité	13
1.2.3.4 \mathcal{K} -connexité et \mathcal{K} -arbre	14
1.3 Le problème et son modèle	14
1.4 Analyse asymptotique	19
1.5 Problème de la fiabilité	19
1.6 Calcul de la fiabilité	22
1.6.1 Méthodes analytiques	22
1.6.1.1 Méthodes directes	22
1.6.1.2 Méthodes topologiques	24
1.6.2 Méthodes de type Monte Carlo	24
1.6.3 Méthodes statistiques de réduction de variance	27
1.7 Propriétés de robustesse	29
1.8 Organisation de la thèse	30
2 Approximation de l'estimateur à variance nulle via l'échantillonnage préférentiel	33
2.1 Défiabilité d'un réseau et échantillonnage préférentiel	33
2.1.1 L'échantillonnage préférentiel optimal	35
2.1.2 La mesure d'échantillonnage préférentiel séquentielle à variance nulle	35

2.2	Approximation de la mesure d'échantillonnage préférentiel à variance nulle	37
2.2.1	Algorithme séquentiel de l'échantillonnage préférentiel avec variance nulle approché	38
2.3	Robustesse de l'approximation de l'estimateur à variance nulle . .	38
2.3.1	Erreur relative bornée de l'estimateur de la défiabilité . . .	39
2.3.2	Erreur relative asymptotiquement nulle de l'estimateur de la défiabilité	41
2.4	Conclusion	43
3	L'échantillonnage préférentiel basé sur la coupe minimale	45
3.1	Approximation basée sur la coupe minimale à probabilité maximale	45
3.1.1	Défiabilité du réseau exprimée par les coupes minimales . .	46
3.1.2	Coupe minimale à probabilité maximale	46
3.2	Algorithme de l'échantillonnage préférentiel basé sur <i>CoupeMin-ProbMax</i>	47
3.3	Théorèmes et preuves des propriétés <i>ERB</i> et <i>ERAN</i>	48
3.3.1	Probabilité maximale de la coupe minimale en fonction du paramètre de rareté ϵ	48
3.3.2	Propriété d'erreur relative bornée	51
3.3.3	Propriété d'erreur relative asymptotiquement nulle dans le cas général	52
3.3.4	Théorème de l'erreur relative asymptotiquement nulle dans le cas homogène	53
3.4	Exemples théoriques	54
3.5	Résultats numériques	62
3.6	Conclusion	67
4	Accélération de l'échantillonnage préférentiel par réduction de graphe	69
4.1	Transformation d'un graphe stochastique	69
4.2	Types de réductions de graphe	71
4.2.1	Réduction parallèle	71
4.2.2	Réduction série	71
4.2.3	Réduction de degré 1	72
4.3	Combinaison échantillonnage préférentiel- réductions de graphe . .	75
4.3.1	Réduction de graphe après l'échantillonnage préférentiel . .	76
4.3.2	Réduction de graphe avant l'échantillonnage préférentiel . .	82
4.4	Comparaison des deux algorithmes <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i>	89
4.4.1	Gain en temps de calcul	89
4.4.2	Gain en variance	89

4.5	Illustrations numériques	91
4.6	Conclusion et discussion	97
5	L'échantillonnage préférentiel basé sur la combinaison linéaire de la coupe minimale et le chemin minimal à probabilités maximales	101
5.1	Combinaison linéaire de deux approximations	101
5.1.1	Exemple de motivation	102
5.1.2	Approximation basée sur le chemin minimal à probabilité maximale	103
5.1.3	Combinaison linéaire <i>CoupeMin-ProbMax</i> et <i>CheminMin-ProbMax</i>	107
5.1.4	Processus d'estimation de la défiabilité basée sur la combinaison linéaire	108
5.2	Apprentissage du coefficient de la combinaison linéaire	108
5.2.1	Méthodes des moindres carrés	108
5.2.2	Heuristique basée sur les défiabilités totales	109
5.2.3	Approche basée sur la minimisation de la variance	109
5.2.3.1	Algorithme de Robbins-Monro [81]	110
5.3	Algorithme d'approximation stochastique	112
5.4	Résultats numériques	115
5.5	Conclusion	127
6	Conclusion générale et perspectives	129
6.1	Conclusion	129
6.2	Perspectives	130
6.2.1	Algorithme de Kiefer-Wofowitz [54]	132
6.2.2	Approche basée sur la minimisation de l'entropie croisée	132
6.2.3	Approximation stochastique basée sur l'entropie croisée ou sur les différences finies centrées	134
	Bibliographie	144
	Table des figures	145
	Liste des tableaux	147
	Liste des algorithmes	149

Résumé

Le calcul de la fiabilité des réseaux est en général un problème NP-difficile. On peut par exemple, s'intéresser à la fiabilité des systèmes de télécommunications où l'on veut évaluer la probabilité qu'un groupe sélectionné de nœuds (qui peut être juste une paire) puissent communiquer, ou s'intéresser aux systèmes d'alimentation électriques où l'on veut estimer le risque que l'électricité n'est pas fournie à certains nœuds, ou encore, étudier la fiabilité des systèmes de transport, où les liens représentent les routes et sont soumis à des dommages. Dans tous ces cas, un ensemble de nœuds déconnectés peut avoir des conséquences critiques, que ce soit financières ou au niveau de la sécurité. Une estimation précise de la fiabilité est ainsi nécessaire. Les réseaux de communication moderne se caractérisent par leur grande taille, donc l'estimation via la simulation de Monte Carlo devient souvent un choix favorable.

Un algorithme de Monte Carlo sous sa forme standard, échantillonne N réalisations du graphe (représentant le réseau) indépendantes, et la défiabilité est estimée à partir de la proportion des N réalisations pour lesquelles les nœuds sélectionnés ne sont pas connectés. Dans ces réseaux, les probabilités de défaillance des liens (arcs) sont généralement petites et donc les pannes d'un réseau deviennent des événements rares. Cela pose un défi majeur pour estimer la fiabilité d'un réseau.

Dans cette thèse, nous présentons différentes techniques basées sur l'échantillonnage préférentiel (Importance Sampling en anglais IS), pour l'estimation de la fiabilité d'un réseau. Grâce à cette technique les probabilités originales d'échantillonnage des arcs sont remplacées par de nouvelles probabilités, puis multiplier l'ancien estimateur par le quotient de vraisemblance (likelihood ratio) pour rester sans biais. On s'intéresse tout particulièrement à l'étude et au calcul de la fiabilité des réseaux hautement fiables et représentés par des graphes statiques. Dans ce cas la défiabilité est très petite, parfois de l'ordre de 10^{-10} , ce qui rend l'approche standard de Monte Carlo inutile, car pour pouvoir estimer cette probabilité il nous faut un échantillon de taille supérieure à dix milliards. Pour une bonne estimation de la fiabilité des réseaux au moindre coût, nous avons étudié, analysé et développé les points suivants :

- En premier lieu nous avons développé une méthode basée sur l'échantillonnage préférentiel. Le processus d'échantillonnage de tous les arcs du graphe sous la nouvelle probabilité est représenté par une chaîne de Markov, telle qu'à chaque étape on détermine l'état d'un arc avec une nouvelle probabilité déterminée en fonction de l'état de tous les arcs précédemment échantillonnés. Les fonctions valeurs de la nouvelle probabilité sont approchées par les coupes minimales possédant la plus grande probabilité de défiabilité, elle est le produit des défiabilités des arcs de la coupe. Des preuves de bonnes

propriétés de l'estimateur basé sur l'échantillonnage préférentiel sont faites.

- Un deuxième point a été abordé et développé, consiste à appliquer des techniques de réduction série-parallèle à chaque étape de l'échantillonnage IS précédemment décrit, afin de réduire substantiellement la variance et le temps de simulation.
- Le dernier point consiste à combiner pour l'approximation de l'estimateur à variance nulle, l'approximation de la défiabilité par une coupe minimale qui sous-estime la défiabilité avec une autre approximation basée sur les chemins minimaux qui la sur-estime. Des algorithmes d'optimisation sont utilisés pour rechercher le facteur optimal d'ajustement des deux approximations pour minimiser la variance.

Abstract

Network reliability determination, is an NP-hard problem. For instance, in telecommunications, it is desired to evaluate the probability that a selected group of nodes (e.g. just one pair) communicate or not, or in a electric power systems, where we need to estimate the risk that electricity is not delivered to certain nodes, or in transportation systems, where damaged routes can be determined. In all these cases, a set of disconnected nodes can lead to critical financials security consequences. A precise estimation of the reliability is, therefore, needed. Modern communication networks are characterized by their large size, so the estimation through Monte Carlo simulation process is often the favorable choice.

The standard form of this algorithm samples N copies of the graph (representing the network) independently, where the unreliability is estimated from the proportion of N copies for which the selected nodes are not connected. In these networks, the probabilities of failure of connections are small and therefore the network failure becomes rare. This poses major challenges to estimate the network reliability.

In this thesis we present different techniques based on importance sampling (IS) for reliability network estimation, which consist in doing a certain changes in the sampling probability arcs. With this technique, the original sampling probabilities arcs are replaced by new probabilities, requiring to multiply the old estimator with the likelihood ratio to remain unbiased. We are particularly interested in the study and determination of reliability of highly reliable networks represented by static graphs. In this case the unreliability is very small, in some case it is around 10^{-10} , which make the standard Monte Carlo approach useless, because in order to estimate this probability we need a sample size larger than ten billion. For a good estimation of system reliability with minimum cost, we have studied, analyzed and developed the following concepts :

- First we developed a method based on (IS). The sampling process of all graph arcs with the new probability is represented by a Markov chain, where at each step we determine the link state by the new probability determined by the states of all links previously sampled. Values of these probabilities are approximated by the minimal cut have largest probability of unreliability. Proves of the good properties of the estimator based on IS are obtained.
- A second development, consists in applying techniques of series parallel reductions at each stage of sampling IS in order to reduce the variance and the time simulation.
- The last point is to combine the unreliability approximation based on minimal cut which underestimates the unreliability with another approximation, an overestimation based on minimal path, for better approximate zero variance estimator. Optimization algorithms are used to find the optimal adjustment factor

the two approximations.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Introduction

Les réseaux de télécommunications se présentent sous forme d'un ensemble d'arcs (liaisons de télécommunication) et de nœuds (commutateur, routeur, ...), mis en place de façon à ce que des messages puissent être transmis d'un bout à l'autre du réseau au travers de multiples liaisons. La fiabilité des réseaux a toujours été une préoccupation majeure depuis les premiers temps de l'ingénierie de fiabilité, pour la création, la validation et la maintenance de nombreux systèmes réels tels que les réseaux de communication, informatique ou électrique [83], [3]. La fiabilité de ces systèmes complexes est d'une importance croissante car un simple accident peut conduire à des résultats désastreux. Les conséquences peuvent être financières, environnementales ou humaines. Tout ceci fait que l'impact des défaillances de certaines composantes sur les réseaux sont de plus en plus stratégiques lors de la conception et de la planification d'un réseau de télécommunication. Depuis le début des années 60 la croissance exponentielle de la taille et le nombre de réseaux de tous types a conduit de nombreux chercheurs à étudier les différentes caractéristiques, la topologie et la probabilité qu'un ensemble de nœuds se communiquent entre eux [26].

L'IEEE 90 standard [105] définit la fiabilité comme « la capacité d'un système ou un composant d'exercer ses fonctions requises dans des conditions déterminées pour une période de temps déterminée ».

Pour cette raison il est important de fournir des méthodes pour aider les concepteurs de réseaux à déterminer la probabilité d'occurrence de ces accidents. Par exemple, la défaillance du réseau d'alimentation électrique en Amérique du Nord le 14 août 2003 a fait plonger dans l'obscurité plus de 50 millions de personnes aux États-Unis et au Canada. La défaillance de certains composants de la transmission de puissance dans l'État de l'Ohio a provoqué un effondrement en cascade de 22 centrales nucléaires et 80 centrales thermiques en moins de 10

secondes. Dans les réseaux de télécommunications, le maximum acceptable d'indisponibilité est d'environ cinq minutes de mise hors service dans un an [107].

Lorsque les composantes d'un réseau sont sujets à des défaillances, on souhaite cerner leur impact sur le comportement global du réseau. Dans ce cadre, l'un des pôles d'intérêt est l'évaluation d'indices de fiabilité du système. La mesure de fiabilité qui nous intéresse ici est la probabilité, à un instant fixé, qu'un ensemble de nœuds communiquent entre eux dans un réseau bidirectionnel où les nœuds sont parfaits et les arcs sont sujets à des défaillances aléatoires indépendantes.

1.2 Définitions

Dans cette section nous fournirons les définitions des deux termes importants de notre problématique qui sont : « réseau » et « fiabilité », et nous rappelons les notions de bases utilisées tout au long de ce document.

1.2.1 Les réseaux

Le transport d'information entre différents sites est en forte croissance, que ce soit des réseaux de télécommunication, ou des réseaux de processeurs. Cette information est véhiculée à travers des canaux (exemple : liaisons de télécommunication), et doit être acheminée d'un site (commutateur, routeur, ...) à l'autre. L'ensemble des canaux et des sites forme le réseau. En conséquence, la création d'outils permettant d'analyser ces réseaux est essentielle. La fiabilité du système, au sens de la connexité stochastique, est un des problèmes liés à cette analyse. En effet, la transmission de l'information n'est possible que si les sites sont reliés, or la défaillance de certains canaux et/ou sites peut entraîner l'isolement de certains sites en déconnectant le réseau.

1.2.2 La fiabilité

Le terme de fiabilité est un néologisme, introduit dans les années 60 pour traduire le terme anglo-saxon « reliability ». L'académie des sciences en donne, à cette époque la définition suivante : « La fiabilité est une grandeur caractérisant la sécurité du fonctionnement ou une mesure de la probabilité de fonctionnement d'un appareillage, selon les normes prescrites ». En 1970, le Comité Électrotechnique Français révisé cette définition pour en donner une nouvelle : « La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif, exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée ». La fiabilité d'un système quelconque F peut s'écrire :

$$R(F) = \text{Probabilité}(F \text{ non défaillant sur l'intervalle de temps } [0, t]).$$

La fiabilité d'un réseau est l'évaluation de son aptitude à exécuter une certaine opération. L'opération consiste pour notre cas, à la communication entre certains sites du réseau. La fiabilité d'un réseau aura alors comme définition, la probabilité que certains nœuds du réseau soient liés.

1.2.3 Notions de base sur les graphes

Soit $G = \mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe déterminé par un ensemble de nœuds $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ de cardinal ℓ et par un ensemble d'arcs $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ de cardinal m . Chaque arc relie deux nœuds du graphe et aucun sens de parcours ne lui est attribué. L'ordre d'un graphe est le cardinal de son ensemble de nœuds.

1.2.3.1 Adjacence

Deux nœuds sont dits adjacents s'ils sont reliés par un arc ; dans ce cas, ils sont les extrémités de l'arc. Un nœud et un arc sont dits incidents si le nœud est une extrémité de l'arc. Deux arcs sont dits adjacents si ils ont une extrémité commune.

1.2.3.2 Sous-graphes

Définition 1.1 Soit deux graphes $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et $\mathcal{G}'(\mathcal{V}', \mathcal{E}')$. Le graphe $\mathcal{G}'(\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ est un **sous-graphe** ou un **graphe partiel** de \mathcal{G} si $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$.

1.2.3.3 Connexité

Dans un graphe \mathcal{G} , un chemin h de longueur l ($l \geq 1$) est une suite de l arcs adjacents. On la note par (v_0, v_1, \dots, v_l) , où v_{i-1} et v_i sont les extrémités du i^{me} arc de la suite. Les nœuds v_0 et v_l sont appelés les extrémités du chemin. On dit aussi que h joint les nœuds v_0 et v_l dans \mathcal{G} .

Un chemin est élémentaire si en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même nœud.

On appelle cycle un chemin dont les extrémités sont confondues. Un cycle est élémentaire s'il ne contient strictement aucun cycle.

Définition 1.2 Une composante **connexe** \mathcal{C} d'un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un sous-ensemble maximal de nœuds tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par un chemin : si $u \in \mathcal{C}$, alors

$\forall v \in \mathcal{C}$, il existe un chemin reliant u à v ,

$\forall w \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{C}$, il n'existe pas de chemin reliant u à w .

Définition 1.3 Un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est dit **connexe** s'il est d'ordre supérieur à 1 (l'ordre d'un graphe est le cardinal de son ensemble de nœuds) et si pour tout

couple de nœuds u et v , il existe un chemin élémentaire dans \mathcal{G} d'extrémités u et v . Autrement dit, un graphe est connexe si et seulement si il a une seule composante connexe.

L'ensemble des nœuds qui représente les canaux qui doivent se communiquer entre eux, est noté par \mathcal{K} , et les nœuds de cet ensemble sont appelés **terminaux**.

Définition 1.4 *L'ensemble de nœuds **terminaux** \mathcal{K} est un sous-ensemble de nœuds qui doivent être connectés à priori $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}, 2 \leq |\mathcal{K}| \leq |\mathcal{V}|$.*

1.2.3.4 \mathcal{K} -connexité et \mathcal{K} -arbre

Définition 1.5 *Soit un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$. Le graphe \mathcal{G} est dit \mathcal{K} -connexe si tous les nœuds de \mathcal{K} sont dans la même composante **connexe** \mathcal{C} de \mathcal{G} .*

Définition 1.6 *Un arbre est un graphe **connexe** sans cycle. Les nœuds de degré 1 d'un arbre sont appelés feuilles de l'arbre.*

Définition 1.7 *Soit un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$. Un \mathcal{K} -arbre de \mathcal{G} est un sous-graphe de \mathcal{G} dont l'ensemble des nœuds contient \mathcal{K} et qui est un arbre dont les feuilles appartiennent toutes à \mathcal{K} .*

1.3 Le problème et son modèle

Notre problème est la quantification de la communication dans un réseau à centres parfaits et canaux bidirectionnels sujets à des défaillances aléatoires et indépendantes. Comme c'est souvent le cas, la topologie du réseau est modélisée par un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, dans notre cas on s'intéresse aux réseaux non orientés : chaque nœud du graphe représente un centre de communication et chacun de ses arcs identifie un canal du réseau. À chaque arc $e_i \in \mathcal{E}$ on associe une variable aléatoire binaire X_i qui représente l'état de l'arc. Dans notre cas, $X_i = 0$, représente que l'arc ne fonctionne pas, et $X_i = 1$, représente que l'arc est opérationnel.

Définition 1.8 *La **configuration** d'un graphe \mathcal{G} est exprimée par un vecteur de variables aléatoires statistiquement indépendantes $X = (X_1, \dots, X_m)$ fixé et représente l'état du graphe \mathcal{G} .*

L'état du graphe \mathcal{G} est donné par le vecteur fixé $X = (X_1, \dots, X_m)$. Soit Σ l'ensemble des configurations possibles du réseau, le vecteur $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Sigma$ s'identifie au sous-ensemble d'arcs \mathcal{E}' , avec

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si } e_i \in \mathcal{E}' \\ 0, & \text{si } e_i \notin \mathcal{E}'. \end{cases}$$

Nous supposons que les variables aléatoires $\{X_i, e_i \in \mathcal{E}\}$ sont mutuellement indépendantes.

Chaque arc e_i est valué par un réel que nous notons par p_i ou p_{e_i} . Ce réel est appelé fiabilité élémentaire ou individuelle de l'arc e_i ; c'est la probabilité que le canal représenté par l'arc e_i soit en état de bon fonctionnement. La probabilité de défaillance de l'arc e_i est le réel $(1-p_i)$ que nous notons q_i ou q_{e_i} . Soit \mathcal{Q} l'ensemble des probabilités des arcs du graphe \mathcal{G} , tel que $\mathcal{Q} = \{p_i(X_i), \dots, p_m(X_m)\}$. On écrit

$$\begin{aligned} p_i &= P(X_i = 1) \\ q_i &= P(X_i = 0) = 1 - p_i. \end{aligned}$$

Définition 1.9 Un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dit **homogène** si tous ses arcs possèdent la même probabilité de défaillance (ou de fiabilité) $q_1 = q_2 = \dots = q_m$, m étant le nombre d'arcs du graphe.

Pour un sous-ensemble de nœuds $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$, on définit le bon fonctionnement (ou défaillance) du réseau par le succès (ou échec) d'interconnexion des nœuds de \mathcal{K} à un instant donné. Nous notons par S (ou Y) cet événement et nous cherchons sa probabilité. Nous désignons cette probabilité par $R(\mathcal{G})$ (ou $u(\mathcal{G})$).

Les réseaux considérés appartiennent à la classe des systèmes binaires. Un système binaire est un système dont l'état, ainsi que celui de chacun de ses composants, est un événement aléatoire à deux éventualités : l'état de marche ou de bon fonctionnement et l'état de panne ou de défaillance. L'état du réseau décrit par la fonction booléenne ψ , appelée *fonction de structure* du réseau, elle égale à 1 si les nœuds \mathcal{K} sont dans la même composante **connexe** de \mathcal{G} , ou égale à 0 sinon, on peut écrire :

$$\psi(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathcal{K} \text{ n'est pas connecté} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.10 Un **chemin** h est un ensemble \mathcal{H} d'indices de composants (nœuds ou arcs) dont le fonctionnement est suffisant pour assurer celui du système.

Définition 1.11 Un **chemin** est **minimal** si aucun de ses sous-ensembles propres $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ n'est un chemin.

Remarque

Algorithmiquement, Le plus court chemin d'un graphe \mathcal{G} peut être trouvé en utilisant l'algorithme de *Dijkstra* (1959) [24].

Définition 1.12 Une **coupe** δ est un ensemble \mathcal{F} d'indices de composants (nœuds ou arcs) dont la défaillance est suffisante pour entraîner celle du système.

Définition 1.13 Une coupe dont aucun sous-ensemble propre $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ n'est une coupe est une **coupe minimale**.

Remarque

La coupe minimal d'un graphe \mathcal{G} peut être trouvée en utilisant l'algorithme de flot-max/coupe-min de *Ford-Fulkerson* (1955) [32].

Définition 1.14 Soit s et t un couple de nœuds dans le graphe \mathcal{G} , on dit les nœuds s et t sont **connectés** si et seulement s'il existe au moins un chemin entre eux.

Exemple 1 Nous considérons un graphe \mathcal{G} non orienté représenté par la figure 1.1. Les nœuds 1 et 4 doivent être connectés, $\mathcal{K} = \{1, 4\}$. Le graphe possède

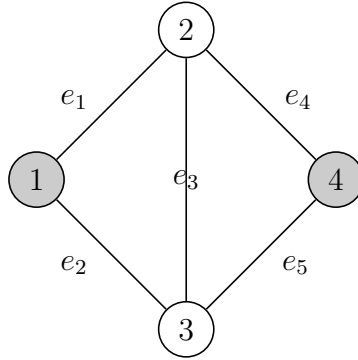


FIGURE 1.1 – Graphe non orienté.

5 arcs e_i avec $i = 1, \dots, 5$ et 4 nœuds. Puisque nous supposons tout au long de notre étude que les nœuds sont parfaits, nous ne considérons donc que l'état des arcs dans les ensembles d'indices de composants précédentes. Nous fournirons pour cet exemple et selon les définitions précédentes les coupes minimales et les chemins minimaux. Le fonctionnement du graphe de la figure 1.1 est traduit par la connection des nœuds 1 et 4. Le graphe possède quatre chemins minimaux dont le fonctionnement des arcs assure le fonctionnement du graphe, autrement dit, la connection de 1 et 4 est assurée par les quatres chemins minimaux suivants. Les quatres chemins minimaux sont représentés par la figure 1.2 :

$$h_1 = \{e_1e_4\}, \quad h_2 = \{e_2e_5\}, \quad h_3 = \{e_1e_3e_5\}, \quad h_4 = \{e_2e_3e_4\}.$$

La défaillance du graphe est traduite par la non connexion des nœuds 1 et 4. La défaillance d'un ensemble d'arcs engendre la défaillance du graphe. Les quatre coupes minimales suivantes engendrent la déconnexion des nœuds 1 et 4. L'ensemble de ces coupes est représenté par la figure 3.3.

$$\delta_1 = \{e_1e_2\}, \quad \delta_2 = \{e_4e_5\}, \quad \delta_3 = \{e_1e_3e_5\}, \quad \delta_4 = \{e_2e_3e_4\}.$$

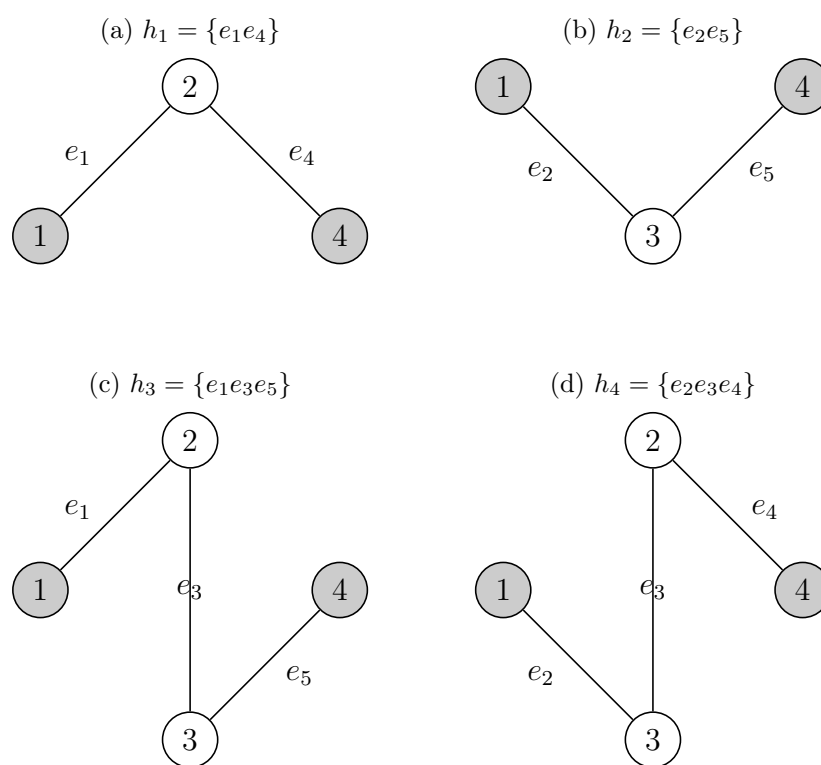


FIGURE 1.2 – Chemins minimaux du graphe non orienté de la figure 1.1.

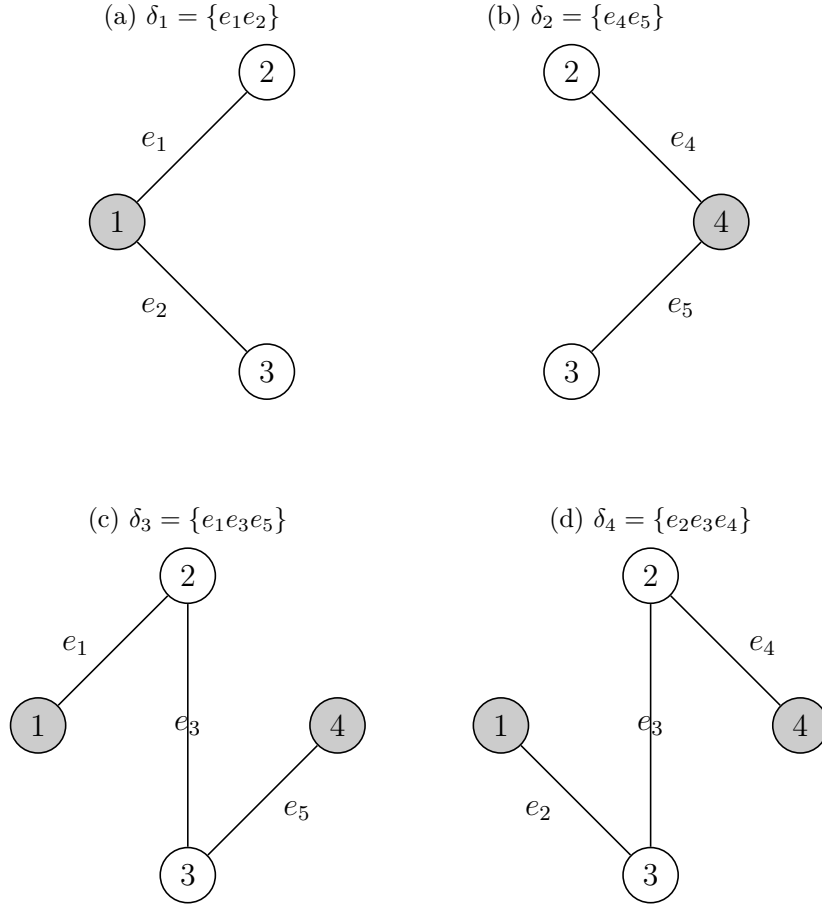


FIGURE 1.3 – Coupes minimales du graphe non orienté de la figure 1.1.

Dans la littérature, la mesure de performance des réseaux habituellement calculée est la fiabilité R avec une fonction indicatrice $\phi(X) = 1 - \psi(X)$, ce qui donne $R(\mathcal{G}) = \mathbb{E}[\phi(X)]$. Pour les réseaux hautement fiables, il est parfois plus utile d'analyser ou d'estimer la probabilité de défaillance du système [48]. Pour cela nous prenons $\psi(X) = 1$ dans le cas où l'ensemble des nœuds de \mathcal{K} ne sont pas dans le même ensemble \mathcal{E}' , qui est considéré comme un événement rare. Notre but est d'estimer l'espérance d'occurrence de cet événement rare. Nous calculons la défiabilité du réseau u qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(\mathcal{G}) = \mathbb{E}[\psi(X)] &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \mathbb{P}[X = x] \\
 &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \prod_{i=1}^m (q_i(1 - x_i) + (1 - q_i)x_i).
 \end{aligned}$$

Si le réseau est composé de m arcs, alors 2^m configurations sont possibles. Cela signifie que le calcul de la défiabilité avec cette formule nécessite un temps qui augmente exponentiellement avec m . Dans le cas de grands graphes, les techniques d'approximation et la simulation de Monte Carlo sont indispensables pour l'estimation de la défiabilité de ce type de graphes.

1.4 Analyse asymptotique

Sachant que la défiabilité $u(\mathcal{G})$ d'un réseau est complètement déterminée par les probabilités individuelles de défaillance q_i des arcs, nous nous intéressons particulièrement au cas où les probabilités de défiabilité individuelles des arcs q_i sont très proches de 0. L'étude des performances de nos algorithmes se fait sous une asymptote assez répandue dans la littérature comme par exemple dans [61],[71],[102]. Cette étude asymptotique consiste à écrire les q_i comme des fonctions polynomiales d'un paramètre de rareté $\epsilon \ll 1$. Plus précisément, nous allons supposer pour chaque $i \in \mathcal{E}$, des constantes positives a_i et b_i (indépendantes de ϵ) telles que

$$q_i = a_i \epsilon^{b_i}. \quad (1.1)$$

Sous cette hypothèse et puisque l'espace de configuration est fini et la probabilité de n'importe quelle configuration x est un polynôme de ϵ , la défiabilité du système, qui dépend de ϵ s'écrit comme suit :

$$u = u(\epsilon) = \Theta(\epsilon^c), \quad (1.2)$$

avec $c \geq 0$ une constante positive, dépendante des b_i .

1.5 Problème de la fiabilité

Selon les types de liens et le nombre de nœuds terminaux, le problème de fiabilité peut être divisé en différents cas [19] : dans la pratique, la nature des arcs dans le réseau peut être non orientés ou orientés (ou mixte), le nombre de terminaux peut varier d'un minimum de deux à un maximum de n (l'ensemble de tous les nœuds étant l'ensemble de terminaux).

Les nœuds terminaux sont essentiels à la fonction système (ou *fonction de structure*) et nécessitent d'être en mesure d'inter-connecter entre eux : le réseau est considéré dans un état de fonctionnement si et seulement si chaque terminal est accessible à partir de tous les autres terminaux.

- L'opération la plus communément demandée à un réseau est la communication d'un nœud source s , vers un nœud terminal t . Pour un graphe

stochastique \mathcal{G} , les deux nœuds s et t sont spécifiés et le problème est alors appelé, problème de fiabilité **2-terminaux**. La fiabilité dans ce cas est définie comme la probabilité qu'il existe au moins un chemin fonctionnel (toutes les composantes sur ce chemin en état de fonctionnement), liant s et t . Pour assurer la connection entre les nœuds terminaux en gris (s, t) du graphe représenté par la figure 1.4, au moins un *chemin* entre eux devrait exister.

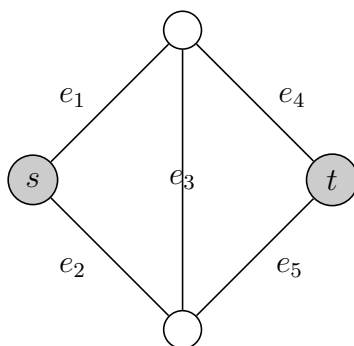
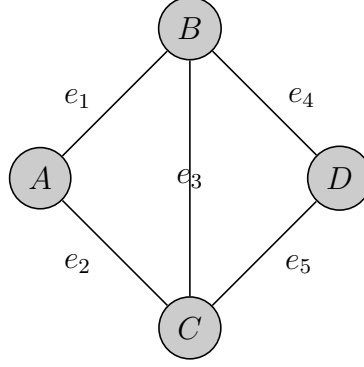
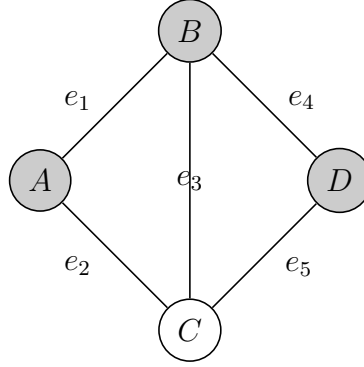


FIGURE 1.4 – Graphe avec **2-terminaux** en gris.

- La fiabilité **tous-terminaux** est le second problème de fiabilité très répandu, puisqu'il concerne tous les réseaux pour lesquels tous les sites doivent communiquer. La fiabilité est la probabilité qu'un chemin fonctionnel existe entre chaque paire de nœud du graphe ou encore la probabilité que le graphe contienne au moins un arbre couvrant (*un arbre couvrant pour un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un arbre construit uniquement à partir des arêtes de \mathcal{E} et qui connecte (« couvre ») tous les nœuds de \mathcal{V}*). A, B, C et D sont les nœuds terminaux du graphe de la figure 1.5, la fiabilité de ce dernier est un problème de fiabilité **tous-terminaux**, car tous les nœuds du graphe doivent être connectés.
- Le problème général, est le problème de fiabilité **\mathcal{K} -terminaux**. Un ensemble \mathcal{K} de nœuds de \mathcal{G} , est spécifié, $2 \leq |\mathcal{K}| \leq |V|$, $|V|$ étant le nombre total des nœuds du graphe. Tous les nœuds de \mathcal{K} doivent être liés pour que le réseau fonctionne. Nous pouvons considérer le graphe de la figure 1.6 comme un graphe **\mathcal{K} -terminaux** avec $|\mathcal{K}| = 3$.

Puisque le problème **\mathcal{K} -terminaux** est le cas le plus général, nous étudierons ce cas tout au long de la thèse, sauf indication contraire. Sauf dans de rares cas, la plupart des réseaux de télécommunication possèdent des liens (arcs) qui trans-

FIGURE 1.5 – Graphe avec *tous-terminaux* en gris.FIGURE 1.6 – Graphe avec *K-terminaux* avec $|\mathcal{K}| = 3$.

mettent les messages dans les deux sens. Plus important encore, quand un lien tombe en panne, la communication dans les deux directions échoue habituellement en même temps. Cela s'inscrit dans le modèle de liens non orientés et nous nous concentrons donc sur le modèle non orienté dans cette thèse. Pour plus de simplicité, nous supposons en outre, que les défaillances sont indépendantes et que les nœuds sont parfaits. Dans le cas où des nœuds terminaux sont imparfaits, il est facile de se ramener à un problème où ils sont parfaits [108], [67]. En effets la fiabilité d'un graphe \mathcal{G} où les nœuds terminaux sont imparfaits peut s'écrire :

$$R(\mathcal{G}) = \prod_{v \in \mathcal{K}} p_v \cdot R(\mathcal{G}_{np}),$$

où \mathcal{G}_{np} est le graphe \mathcal{G} avec les nœuds terminaux parfaits. v représente les nœuds imparfaits, possédant une probabilité p_v non nulle.

1.6 Calcul de la fiabilité

La fiabilité du réseau est définie comme la probabilité que tous les nœuds, ou un sous-ensemble des nœuds, ou même une paire de nœuds, du graphe peuvent communiquer à travers au moins un chemin d'arêtes. La calculer est NP-difficile en général [3], [8], [9], [10], [19], [113]. Les techniques de calcul proposées dans la littérature pour résoudre ce problème sont nombreuses et généralement, elles supposent que les éléments du réseau sont statistiquement indépendants. On a deux classes de méthodes : les méthodes analytiques et les méthodes de simulation.

1.6.1 Méthodes analytiques

1.6.1.1 Méthodes directes

- Les méthodes de partitionnement de l'espace d'état ou méthodes d'énumération complet :
si le graphe est assez petit, sa fiabilité peut être calculée directement par l'énumération de toutes les configurations possibles du graphe. Les états qui engendrent un fonctionnement du réseau sont alors probabilisés. Cependant, la fiabilité du réseau est la somme de ces probabilités. Considérons le graphe stochastique $G = \mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{K})$ définit précédemment par le modèle, où \mathcal{V} est l'ensemble des nœuds, \mathcal{E} est l'ensemble d'arcs, et \mathcal{K} est l'ensemble des nœuds terminaux. Soit $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(\mathcal{V}', \mathcal{E}', \mathcal{K})$ un sous-graphe de $G = \mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{K})$ avec $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ et soit Ω l'ensemble de tous les sous-graphes de G connectés. Pour tout $\mathcal{G}' \in \Omega$, les nœuds terminaux sont connectés. La fiabilité du réseau peut s'écrire comme suit,

$$R(\mathcal{G}) = \sum_{\mathcal{G}' \in \Omega} \left(\prod_{i \in \mathcal{G}'} p_i \prod_{i \notin \mathcal{G}'} (1 - p_i) \right).$$

Puisque nous avons 2^m de configuration du graphe, cette méthode nécessite un temps exponentiel en la taille du graphe (nombre d'arcs) pour le calcul de la fiabilité, m étant le nombre d'arc du graphe.

- Evaluation par les ensembles minimaux :
les chemins minimaux ou les coupes minimales sont d'abord énumérés [7],[68] puis l'expression de fiabilité est évaluée, en recourant à différentes techniques [3], comme la méthode d'inclusion-exclusion ou la somme des produits disjoints [1], [116], [78], [45].
- **Méthode d'inclusion-exclusion.**
On désigne par $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ l'ensemble des chemins minimaux de \mathcal{G} , par S_i l'événement « tous les arcs de P_i sont opérationnels » et par $E(S)$ l'événement « le système est en bon fonctionnement ». Puisque le bon

fonctionnement de tous les arcs d'un chemin implique la bonne marche du système et inversement,

$$R(\mathcal{G}) = \mathbb{P}[E(S)] = \mathbb{P}(S_1 \cup \dots \cup S_r).$$

Les événements S_i , pour $1 \leq i \leq r$ ne sont pas mutuellement disjoints. La formule de Poincaré [28] permet d'écrire

$$R(\mathcal{G}) = \sum_{h=1}^r (-1)^{h-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_h} \mathbb{P}(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_h}).$$

En utilisant le fait que $\mathbb{P}(S_i) = \prod_{e \in P_i} p_e$, l'expression de la fiabilité en fonction des fiabilités élémentaires est

$$R(\mathcal{G}) = \sum_{h=1}^r (-1)^{h-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_h} \prod_{e \in P_{i_1} \cup P_{i_2} \cup \dots \cup P_{i_h}} p_e. \quad (1.3)$$

Dans le second terme de l'équation (1.3) on a 2^r de configurations possibles du système. Cependant, des termes identiques en valeur absolue peuvent apparaître et le nombre de termes peut être réduit en rassemblant les termes identiques entre eux. Satyanarayana et Prabhakar dans [98] et Satyanarayana dans [96], donnent l'expression simplifiée de (1.3). A ce sujet on peut consulter [3], [65], [66] et [97].

– **Méthode des produits disjoints.**

Une deuxième approche consiste à transformer le polynôme booléen des ensembles minimaux pour $\phi(x) = 1 - \psi(x)$ en une somme de termes disjoints. Deux termes sont disjoints si une variable qui est sous forme directe (x_i) dans l'un, est complémentée dans l'autre (\bar{x}_i). On écrit

$$S_1 \cup \dots \cup S_r = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_r, \quad (1.4)$$

avec $D_1 = S_1$ et $D_i = S_i \cap \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \dots \cap \bar{S}_{i-1}$, pour $2 \leq i \leq r$. Les n événements D_i sont mutuellement exclusifs, ce qui permet d'obtenir $R(\mathcal{G})$ sous forme d'une somme de leurs probabilités :

$$R(\mathcal{G}) = \mathbb{P}(S_1 \cup \dots \cup S_r) = \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(D_3) + \dots + \mathbb{P}(D_r). \quad (1.5)$$

L'efficacité dépend de l'organisation des calculs. Toute une série de méthodes ont été présentées basées sur (1.4) ; citons : [33], [1], [77], [109], [2], [12], [14], [95], [100], [31], [11], [66] et [46].

Ces méthodes d'énumération des ensembles minimaux ne permettent de traiter que les réseaux de petite taille car leur complexité dépend du cardinal de l'ensemble des chemins ou des coupes qui peut être exponentiel en fonction du nombre de composants du réseau.

1.6.1.2 Méthodes topologiques

Parmi les méthodes de transformation on cite les méthodes de réduction et les méthodes de décomposition :

- Les méthodes de réduction consistent à réduire le graphe avec préservation de la fiabilité (la fiabilité du graphe réduit est égale à la fiabilité du graphe initial), par applications successives de réductions séries-parallèles, polygone-chaîne, ou encore delta-étoile, dans le but de réduire la taille du graphe et de réduire le coût de calcul. Quelques types de réductions sont utilisés dans cette thèse. Pour plus de détails sur les types de réductions de graphes voir [67].
- Concernant les méthodes de décomposition, leur principe repose sur la division du graphe \mathcal{G} , en sous-graphes, de telle sorte que l'analyse de ces derniers, permet l'évaluation de la fiabilité de \mathcal{G} . Plus de détails sur ces méthodes dans [67].
- Les méthodes de factorisation basées sur la relation topologique de Moskowitz. Le problème de fiabilité est décomposé en deux sous-problèmes de fiabilité : un pour lequel l'arc e_i fonctionne et l'autre pour lequel l'arc e_i ne fonctionne pas. Cependant, si e_i est le i^{ime} arc du graphe \mathcal{G} connectant deux nœuds, on écrit $e_i = (v_i, v_{i+1})$, la fiabilité du réseau est donnée par :

$$R(\mathcal{G}) = p_i R(\mathcal{G}.e_i) + (1 - p_i) R(\mathcal{G} - e_i).$$

Où p_i est la probabilité de la fiabilité de l'arc e_i . $\mathcal{G}.e_i$ est le graphe obtenu en comprimant l'arc e_i dans \mathcal{G} (v_i et v_{i+1} seront fusionnés et deviennent un seul nœud), et $\mathcal{G} - e_i$ est le graphe obtenu en supprimant l'arc e_i dans \mathcal{G} .

Une synthèse de certaines méthodes analytiques pour le calcul de la fiabilité est dans [85]. Ces méthodes analytiques fournissent une valeur exacte de la fiabilité du réseau, par l'étude de tous ses composants. Pour des graphes quelconques, leur coût est exponentiel en fonction de la taille du réseau, c'est pourquoi leur application est plutôt réservée aux réseaux de petites tailles ou encore à la combinaison avec d'autres méthodes [57]. Pour les réseaux de grandes tailles, les méthodes directes deviennent impraticables.

1.6.2 Méthodes de type Monte Carlo

Le terme « Monte Carlo » est employé dans de nombreuses disciplines et fait référence aux procédures, où les quantités d'intérêt sont approximées en générant

de nombreuses réalisations aléatoires d'un processus stochastique quelconque, et en calculant une moyenne quelconque de leurs valeurs.

Soit $u(\mathcal{G})$ la probabilité de défaillance du réseau modélisé par le graphe \mathcal{G} . Pour estimer cette probabilité, le modèle du système est simulé N fois (on construit N échantillons du modèle exprimé par $\psi(X)$ avec $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ la configuration du graphe \mathcal{G}), à chaque réalisation (ou simulation) nous enregistrons l'état de ce dernier (l'événement « défaillance du graphe » est atteint ou non). Les N variables aléatoires sont statistiquement indépendantes entre elles. Chaque réalisation consiste à échantillonner l'état des arcs un par un, sachant l'état des précédents. A l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires uniformément distribués dans $]0,1[$, la procédure de l'échantillonnage fournit l'état pour chaque arc e_i du vecteur X . L'état d'un arc e_i de défiabilité q_i (exprimée par un paramètre de rareté ϵ donnée par section 1.3) est obtenu de la manière suivante : On génère aléatoirement un réel U , l'arc e_i est en bon fonctionnement si $U > q_i$ et il est défaillant dans le cas contraire [29]. Lorsque l'échantillonnage d'un arc e_i est effectué, l'arc e_i est supprimé s'il ne fonctionne pas, ou sinon l'arc e_i est comprimé. Ce qui donne lieu à un graphe partiel. Une réalisation est favorable si tous les nœuds de \mathcal{K} ne sont pas dans la même composante connexe du graphe partiel \mathcal{G}' qui modélise la topologie du réseau. Si nous considérons $\psi(X^{(i)})$ est la variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli, nous avons alors : $\psi(X^{(i)}) = 1$ si la défaillance du graphe est produite dans i^{eme} réalisation, 0 sinon. Une estimation de la probabilité $u(\mathcal{G})$ est alors la proportion de graphes partiels où \mathcal{K} non-connexes parmi les N graphes partiels générés, est donnée par :

$$\hat{u}_{MC}(\mathcal{G}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(X^{(i)}).$$

En utilisant l'indépendance mutuelle des variables $X^{(i)}$, pour $1 \leq i \leq N$, et le fait que $Var(\psi(X)) = u(\mathcal{G})(1 - u(\mathcal{G}))$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Var(\hat{u}_{MC}) &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \psi(X^{(i)})^2 - \left(\sum_{i=1}^N \psi(X^{(i)}) \right)^2 \right) \\ &= \frac{u(1-u)}{N}. \end{aligned}$$

Pour N grand, l'approximation de la loi de la variable \hat{u}_{MC} par la loi normale centrée réduite permet d'obtenir un intervalle de confiance de niveau ξ comme suit :

$$\left[\hat{u}_{MC} - z\sqrt{Var(\hat{u}_{MC})}, \hat{u}_{MC} + z\sqrt{Var(\hat{u}_{MC})} \right]$$

où z est défini par l'équation $\xi/2 = P(N(0, 1) \geq z)$,

$z = F^{-1}(1 - \frac{\xi}{2})$ et $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

La probabilité que $u(\mathcal{G})$ appartienne à l'intervalle de confiance est $100(1 - \xi)\%$, cela peut s'écrire comme suit :

$$\mathbb{P} \left(u \in \left[\hat{u}_{MC} - z\sqrt{\text{Var}(\hat{u}_{MC})}, \hat{u}_{MC} + z\sqrt{\text{Var}(\hat{u}_{MC})} \right] \right) = 100(1 - \xi)\%.$$

La demi-largeur de l'intervalle de confiance est :

$$\begin{aligned} z\sqrt{\frac{\text{Var}(\hat{u}_{MC})}{(\mathbb{E}[\hat{u}_{MC}])^2}} &= z\frac{\sqrt{\text{Var}(\psi(X))/N}}{(\mathbb{E}[\psi(X)])} \\ &= z\sqrt{\frac{1-u}{Nu}}. \end{aligned}$$

Une mesure importante pour l'efficacité d'un estimateur est l'erreur relative (ou relative error « Re »). L'erreur relative pour \hat{u}_{MC} est définie comme suit :

Définition 1.15 Soit $\text{Var}(\hat{u}_{MC})$ la variance de \hat{u}_{MC} pour un échantillon de taille N et soit z le quantile d'ordre $1 - \xi/2$ de la loi normale centrée réduite. L'erreur relative Re est donnée par :

$$\begin{aligned} Re(\hat{u}_{MC}) &= \sqrt{\frac{\text{Var}(\hat{u}_{MC})}{(\mathbb{E}[\hat{u}_{MC}])^2}} \\ &= \sqrt{\frac{u(1-u)/N}{u^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-u)}{Nu}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

(Car une Bernoulli de paramètre u possède une variance $u(1-u)$), ce concept est important car il assure que, quelle que soit la fiabilité du système, la largeur de l'intervalle de confiance restera de taille relative mesurée. D'après (1.6), nous avons :

$$Re(\hat{u}_{MC}) \sim 1/\sqrt{Nu}$$

Cela montre que pour des petites valeurs de u , l'erreur relative augmente, nous avons :

$$Re(\hat{u}_{MC}) \sim 1/\sqrt{Nu} \rightarrow \infty \text{ quand } u \rightarrow 0.$$

Ainsi, l'utilisation de la simulation standard de Monte Carlo pour l'estimation des événements rares nécessite un très grand échantillon pour maintenir une erreur relative à un niveau donné.

Exemple 2 L'estimation de u avec une précision de $\pm 10\%$ (environ deux chiffres significatifs de précision) signifie qu'il faut que la demi-largeur de l'intervalle de confiance doit être inférieure à 0.1. C'est à dire

$$z\sqrt{\frac{1-u}{Nu}} \leq 0.1.$$

La question qui se pose est, quelle doit être la valeur de N afin de parvenir à ce niveau de précision ? Nous avons $N = 100 \times z^2 \times (1-u)/u$, i.e., la taille de l'échantillon est proportionnel à $1/u$. Pour estimer des petites valeurs de u , le N nécessaire doit être grand ($N = O(1/u)$). Par exemple, si $u = 10^{-6}$, l'échantillon est 6.64×10^8 , quand $u = 10^{-9}$, l'échantillon est 6.64×10^{11} (664 milliards de simulations sont nécessaires). Notons que ces échantillons doivent être augmentés d'un facteur de 100 afin d'atteindre un chiffre significatif supplémentaire de précision ($\pm 1\%$).

Citons dans la section suivante, d'autres propriétés de robustesse d'un estimateur.

1.6.3 Méthodes statistiques de réduction de variance

Le problème rencontré par la simulation Monté Carlo standard a motivé l'apparition des techniques accélérées d'estimation de type Monte Carlo. Ces techniques visent à modifier le problème ou l'estimateur standard, ou même certains aspects de mise en œuvre, afin d'obtenir la même précision (i.e., largeur de l'intervalle de confiance) sans demander autant de puissance de calcul. Selon [110], améliorer l'efficacité d'un estimateur signifie obtenir la même précision en un temps plus court. Il y a deux possibilités pour cela.

- Chercher à diminuer le temps de calcul d'une réplication, de manière à générer plus de variables en un temps donné.
- Chercher à réduire la variance de l'estimateur.

Différentes techniques de réduction de la variance existent dans la littératures [42][30], [53], [58], [59] et [114]. Ces méthodes fournissent des estimations plus précises que celles obtenues par la simulation standard avec le même nombre d'expériences. Nous présentons les définitions dans le cas général des principales techniques telles qu'elles sont présentées dans [110].

- L'utilisation de variables de contrôle. La variance est la moyenne du carré des écarts de la variance de la variable $f(X)$ par rapport à son espérance.

Si on dispose d'une fonction g suffisamment simple pour être intégrée théoriquement et qui reproduit et absorbe la plupart des variations de f , l'intégrale de f peut être exprimée comme celle de g plus celle de la différence entre f et g , mais la variance devient alors celle, plus petite, de $(f - g)(X)$.

- L'utilisation de variables antithétiques. Ici il s'agit de chercher un second estimateur ayant la même espérance mais ayant une forte corrélation négative avec l'estimateur standard. En considérant la moyenne des deux estimateurs, on obtient ainsi une estimation non biaisée, et avec une très faible variance.
- L'échantillonnage stratifié. Il s'agit de partitionner le domaine d'intégration en sous domaines, et d'appliquer un échantillonnage Monte Carlo standard à chacun des sous domaines. Si la proportion de l'échantillonnage total réservé à chaque sous domaine est égale à la proportion du volume de ce sous domaine par rapport au volume total, nous sommes sûrs d'obtenir une réduction de la variance.
- L'échantillonnage préférentiel. Cette méthode consiste à modifier la loi des variables aléatoires échantillonnées. Dès lors, il ne s'agit plus d'estimer la fonction f de la nouvelle variable, mais f multipliée par une fonction appelée quotient de vraisemblance introduite pour éliminer le biais (plus exactement la distorsion) résultant du changement de variable. L'objectif de l'échantillonnage préférentiel est de concentrer la distribution de l'échantillon aux endroits « d'importance » pour l'évaluation de l'intégrale plutôt qu'uniformément.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux méthodes d'échantillonnage préférentiel (EP) pour l'estimation de la fiabilité des réseaux hautement fiables, plus particulièrement à l'évaluation de la probabilité qu'un groupe sélectionné de nœuds (qui peut être juste une paire) communiquent entre eux, dans un réseau représenté par un graphe statique non orienté, où les nœuds sont considérés parfaits et les liaisons sont sujets à des défaillances aléatoires indépendantes. Ces dernières sont exprimées en fonction d'un paramètre de rareté ϵ [102] tel que la défiabilité du réseau $u \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. L'évaluation de la robustesse des estimateurs obtenus par nos techniques d'échantillonnage préférentiel que nous présentons dans ce document se fait selon deux propriétés de robustesse, que nous présentons dans la section suivante.

1.7 Propriétés de robustesse

Deux propriétés de mesure de robustesse de nos algorithmes sont : l'*erreur relative bornée* ou (*Bounded Relative Error*) donnée par l'équation (1.7) que nous appelons dans la suite de ce document (*ERB*) [71, 44, 5, 111], qui consiste à maintenir la demi-largeur de l'intervalle de confiance (qui est le rapport entre l'écart type de l'estimateur de la défiabilité du système $\sqrt{\text{Var}(\hat{u}_N)}$ et de ce dernier u_N), bornée pour un échantillon N et quand $\epsilon \rightarrow 0$ (ϵ paramètre de rareté donné dans la section 1.4). Considérons un estimateur sans biais \hat{u}_N de u_N obtenu pour un échantillon de taille N et $\text{Var}(\hat{u}_N) = \sigma^2$ la variance de \hat{u} pour un échantillon N . L'erreur relative bornée (*ERB*) a été définie par P. Shahabuddin dans [102] donnée par l'équation (1.7), quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Définition 1.16 L'estimateur \hat{u} possède une *erreur relative bornée* (*ERB*) ou *variance relative bornée* (*Bounded Relative Error*) [102], [43], si

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma(\hat{u}_N)}{u_N} < \infty. \quad (1.7)$$

Cette demi-largeur peut tendre vers 0, quand $\epsilon \rightarrow 0$, on appelle cette propriété par l'*erreur relative asymptotiquement nulle* ou (*Vanishing Relative Error*) que nous appelons dans la suite de ce document (*ERAN*) [23].

Définition 1.17 L'estimateur possède une *erreur relative asymptotiquement nulle* (*ERAN*) (*Vanishing Relative Error*) [23], [61], si

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma(\hat{u}_N)}{u_N} = 0, \quad (1.8)$$

ou d'une façon équivalente

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E(\hat{u}_N^2)}{u_N^2} = 1. \quad (1.9)$$

Ces deux propriétés sont essentielles pour l'évaluation de la qualité des estimateurs obtenus par les méthodes statistiques.

Une autre notion de robustesse autre que l'erreur relative, appelée *optimalité asymptotique*, a été très utilisée pour l'échantillonnage préférentiel appliqué aux files d'attente.

Définition 1.18 [13, 72] Un estimateur \hat{u} est dit *asymptotiquement optimal* si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln E[\psi(X)^2]}{\ln u} = 2.$$

On peut noter que cette quantité est toujours inférieure ou égale à 2 [110].

Définition 1.19 [18] Soit \hat{u} un estimateur de u , σ_N^2 sa variance pour N répliques (pouvant être dépendantes). Soit t_N le temps moyen pour obtenir ces N répliques. L'efficacité relative de \hat{u} est

$$EffR = \frac{u^2}{\sigma_N^2 t_N}.$$

On dit que \hat{u} vérifie l'efficacité relative bornée (EffRB) s'il existe $d > 0$ tel que $EffR$ soit minoré par d , $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} EffR(u) > 0$.

Une mesure quantitative pour mesurer l'efficacité relative d'un algorithme (ou d'une méthode) par rapport à un autre algorithme (ou une autre méthode) est le rapport :

$$\frac{t_1 \times \hat{V}_1}{t_2 \times \hat{V}_2}.$$

avec \hat{V}_1 la variance obtenue par l'algorithme 1 pour un échantillon N pendant t_1 . \hat{V}_2 la variance obtenue par l'algorithme 2 pour un échantillon N pendant t_2 . Si

$$\frac{t_1 \times \hat{V}_1}{t_2 \times \hat{V}_2} > d,$$

avec d une constante positive, l'algorithme 2 est alors au moins d fois plus rapide que l'algorithme 1. Pour plus de détails sur les propriétés de robustesse d'un estimateur voir ([18], [112]).

Quand u est très petit, l'événement que les nœuds terminaux ne sont pas connectés est un événement rare. Dans la section suivante nous présentons une méthode permettant d'augmenter la précision et d'estimer la défiabilité u à moindre coût.

La simulation standard n'exploite aucune information pour accélérer la simulation. Lorsque le système est hautement fiable, un nombre prohibitif d'expériences est nécessaire à la rencontre de l'événement rare.

1.8 Organisation de la thèse

Ce document est composé de six chapitres. Dans le premier chapitre qui consiste à cette introduction générale, nous avons discuté de l'importance de l'estimation de la fiabilité des réseaux et nous avons introduit les techniques dont nous disposons à cet effet. Ce chapitre nous a permis d'établir le contexte dans lequel se déroulent nos travaux de recherche.

Dans le second chapitre nous développons une méthode basée sur ce que l'on appelle échantillonnage préférentiel (EP) ou Importance Sampling (IS), qui

consiste à effectuer un changement de la probabilité d'échantillonnage des arcs, puis multiplier l'ancien estimateur par le quotient de vraisemblance (likelihood ratio) pour rester sans biais. Le processus d'échantillonnage de tous les arcs du graphe sous la nouvelle probabilité est représenté par une chaîne de Markov, telle qu'à chaque étape on détermine l'état d'un arc avec une nouvelle probabilité déterminée en fonction de l'état de tous les arcs précédemment échantillonnés. Cette nouvelle probabilité d'échantillonnage de chaque arc $\tilde{p}(X_{e_i})$ ou la probabilité d'échantillonnage préférentiel que nous appelons tout au long de ce document « mesure d'échantillonnage préférentiel », est fonction de deux probabilités du graphe partiel conditionné sur l'état de l'arc en cours d'échantillonnage (arc fonctionne ($x_i = 1$) et arc ne fonctionne pas ($x_i = 0$)), sachant l'état des arcs précédemment échantillonnés $j < i$. La défiabilité du graphe conditionnel est appelée dans la suite de ce document par « défiabilité conditionnelle » ou « fonction valeur ».

Dans le troisième chapitre nous définissons une approximation de l'estimateur à variance nulle via l'échantillonnage préférentiel. Les défiabilités conditionnelles nécessaires pour le calcul de la nouvelle probabilité d'échantillonnage préférentiel sont approchées par les coupes minimales possédant la plus grande probabilité de défiabilité. Nous étudions et analysons les propriétés de notre échantillonnage préférentiel sous un régime asymptotique qui consiste à vérifier l'évolution de l'erreur relative de l'estimateur (qui est le rapport entre l'écart type de l'estimateur et l'estimateur), lorsque la défiabilité $q_i = 1 - p_i$ de tous les arcs du réseau tend vers zéro. Sous certaines conditions, l'estimateur obtenu par notre plan d'échantillonnage est prouvé posséder une erreur relative bornée et même une erreur relative asymptotiquement nulle sous des conditions supplémentaires. Les résultats théoriques sont validés par les résultats expérimentaux.

Un point est abordé et développé dans le quatrième chapitre, consistant à appliquer des techniques de réduction série-parallèle à chaque étape de l'échantillonnage préférentiel précédemment décrit, afin de réduire substantiellement et la variance et le temps de simulation. Les types de réductions ou de transformations appliquées à nos graphes sont les réductions séries-parallèles, celles qui sont le plus souvent appliquées dans la littérature et combinées à d'autres techniques en mesure d'estimer la défiabilité des réseaux [57], [16]. Deux approches de combinaison de notre échantillonnage préférentiel et de ces réductions série-parallèle sont proposées.

Une technique d'échantillonnage préférentiel adaptatif est proposée dans le cinquième chapitre. Les défiabilités conditionnelles sont approchées par la combinaison linéaire de deux fonctions basiques. Des techniques d'optimisations sont

appliquées afin de choisir le meilleur ajustement entre les deux fonctions basiques tout en obtenant la plus petite variance possible. La première fonction basique utilisée dans la combinaison linéaire est celle proposée dans le troisième chapitre de cette thèse, basée sur la probabilité conditionnelle de la coupe minimale sous-estimant la vraie valeur de la défiabilité conditionnelle. La seconde fonction basique utilisée, qui sur-estime la vraie valeur de la défiabilité conditionnelle, est basée sur le chemin minimal entre la source et la destination dans le graphe.

Le dernier chapitre conclut ce travail et dégage quelques pistes à étudier par la suite.

Chapitre 2

Approximation de l'estimateur à variance nulle via l'échantillonnage préférentiel

L'échantillonnage préférentiel (EP : abréviation dans la littérature) remonte au moins à Hammersley et Handscomb (1965) [41] (Los Alamos pour les méthodes de Monte Carlo), et est couramment utilisé dans plusieurs domaines (pour des références générales sur l'échantillonnage préférentiel, voir [37] et [35], [27] ou [82]). Pour le problème de la fiabilité des graphes statiques des méthodes d'échantillonnage préférentiels sont proposées [15], [50] et [84]. La principale difficulté est le bon choix de nouvelles probabilités. Ces probabilités doivent présenter des caractéristiques délicates à vérifier. Le mauvais choix de ces probabilités peut produire de grandes variations du rapport de probabilités (rapport entre les probabilités originales et les nouvelles probabilités). Nous présentons dans ce chapitre l'approximation de l'estimateur à variance nulle via l'échantillonnage préférentiel. Cet algorithme est l'algorithme de base que nous développerons dans les chapitres à venir. À la fin de ce chapitre, nous proposons les conditions pour lesquelles l'estimateur possède deux propriétés importantes de robustesse.

2.1 Défiabilité d'un réseau et échantillonnage préférentiel

La technique d'échantillonnage préférentiel ou (Importance sampling « IS »), est de remplacer les probabilités des 2^m configurations par de nouvelles probabilités [6], [51] et [62]. Le but principal de changement de la probabilité d'échantillonnage est de remplacer l'estimateur original $\psi(X)$ qui a pour erreur relative $Re(\psi(X)) = \Theta(u^{-1/2})$ par un estimateur non biaisé Z avec une variance plus

petite. C'est dans cette optique que plusieurs techniques sont alors conçues [15]. Nous nous intéressons à obtenir une erreur relative bornée du nouveau estimateur Z , i.e., $Re[Z] < \infty$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, ou mieux à obtenir une erreur relative asymptotiquement nulle de Z qui se traduit par $Re[Z] \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, qui n'est jusqu'à maintenant pas vérifiée par aucune méthode pour le problème de la fiabilité des réseaux.

La défiabilité écrite avec les probabilités originales \mathbb{P} est donnée par :

$$u = \mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \mathbb{P}[X = x]$$

Nous introduisons les nouvelles probabilités que nous notons $\tilde{\mathbb{P}}[X = x]$. La défiabilité sous la nouvelle mesure d'échantillonnage préférentiel $\tilde{\mathbb{P}}$ s'écrit aussi :

$$u = \mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) L(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x].$$

avec $L(x)$ le *rapport de vraisemblance* ou le *rapport de probabilités* originales et les nouvelles probabilités (*Likelihood ratio*), avec $\tilde{\mathbb{P}}[X = x] > 0$ quand $\psi(x) \mathbb{P}[X = x] > 0$,

$$L(x) = \frac{\mathbb{P}[X = x]}{\tilde{\mathbb{P}}[X = x]}.$$

Un nouvel estimateur est $Z = \psi(X)L(X)$ sous la nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$, tel que

$$u = \tilde{\mathbb{E}}[Z] = \tilde{\mathbb{E}}[\psi(X)L(X)].$$

Nous obtenons l'estimateur non biaisé suivant de la défiabilité :

$$\hat{u}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(X^{(i)}) L(X^{(i)}), \quad (2.1)$$

où $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$ sont des copies indépendantes de X , distribuées selon les nouvelles probabilités $\tilde{\mathbb{P}}$.

Comme dans le cas de l'estimation Monte Carlo standard, l'intervalle de confiance dans ce cas est donné par :

$$\left[\hat{u}_N - z \sqrt{\text{Var}(\hat{u}_{IS})}, \hat{u}_N + z \sqrt{\text{Var}(\hat{u}_{IS})} \right],$$

que nous pouvons écrire en fonction de la variance du nouveau estimateur $Z = \psi(X)L(X)$ comme suit

$$\left[\hat{u}_N - z \sqrt{\frac{\text{Var}(\psi(X)L(X))}{N}}, \hat{u}_N + z \sqrt{\frac{\text{Var}(\psi(X)L(X))}{N}} \right]$$

avec

$$\sigma^2 = \text{Var}[\psi(X)L(X)] = \mathbb{E}[(\psi(X)L(X))^2] - [\mathbb{E}(\psi(X)L(X))]^2. \quad (2.2)$$

2.1.1 L'échantillonnage préférentiel optimal

L'échantillonnage préférentiel optimal consiste à sélectionner une nouvelle loi de probabilité dans le cas discret [62] (ou une nouvelle fonction de densité dans le cas continu [25]) de sorte que,

$$L(X) = \frac{\mathbb{P}[X = x]}{\tilde{\mathbb{P}}[X = x]} = \frac{\mathbb{E}[\psi(X)]}{\psi(X)},$$

avec $\psi(X) > 0$, ce qui signifie, pour tous $x \in \{0, 1\}^m$ nous avons

$$\tilde{\mathbb{P}}[X = x] = \psi(x)\mathbb{P}[X = x]/u.$$

Avec cette nouvelle mesure d'échantillonnage préférentiel nous obtenons,

$$\mathbb{E}[(\psi(X)L(X))^2] = (\mathbb{E}[\psi(X)])^2,$$

i.e., $\sigma^2(\psi(X)L(X)) = 0$, ce qui signifie un estimateur à variance nulle. Nous appelons le changement de \mathbb{P} à $\tilde{\mathbb{P}}$ le changement de la mesure originale à une nouvelle mesure à variance nulle. Tout cela est beau en théorie, mais en pratique, il y a un inconvénient important, la mise en œuvre du changement optimal de mesure nécessite la connaissance de $\mathbb{E}[\psi(X)]$, la quantité que nous voulions calculer, si nous la connaissions, aucune simulation ne serait nécessaire. L'approximation de la mesure d'échantillonnage préférentiel est l'objectif de la section 2.2. Dans la section 2.1.2, la forme séquentielle de la mesure optimale est donnée.

2.1.2 La mesure d'échantillonnage préférentiel séquentielle à variance nulle

Dans cette section nous définissons notre mesure d'échantillonnage préférentiel à variance nulle, en adaptant les techniques décrites dans [56], [62] et [64]. En premier lieu nous assimilons l'échantillonnage de X à un processus de Markov. Chaque état de la chaîne de Markov correspond à la configuration du graphe conditionnel sur des arcs précédemment échantillonnés X_1, \dots, X_{i-1} , quant aux transitions (passage d'un état à l'autre de la chaîne de Markov) de la chaîne,

elles correspondent chacune aux probabilités d'échantillonnage. À chaque étape i de la chaîne de Markov, on génère la variable X_i du vecteur de variables aléatoires indépendantes X , représentant l'état de l'arc e_i . L'échantillonnage sous la nouvelle loi de probabilité (mesure d'échantillonnage préférentiel) consiste à changer à chaque étape i de la chaîne de Markov les probabilités originales q_i par de nouvelles probabilités \tilde{q}_i qui dépendent des valeurs des variables aléatoires X_1, \dots, X_{i-1} précédemment échantillonnées. Pour déterminer \tilde{q}_i , on utilise la probabilité que les nœuds terminaux du sous graphe $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)$ à l'étape i ne soient pas connectés, sachant l'état des arcs 1 à $i-1$:

$$u_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = \mathbb{E}[\psi(X) | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}].$$

Remarquons qu'en appliquant la loi des probabilités totales, $u_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ peut s'écrire comme suit :

$$u_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = q_i u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + (1 - q_i) u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1). \quad (2.3)$$

Les probabilités de défiabilité originales q_i sont alors remplacées par les nouvelles probabilités de défiabilité \tilde{q}_i (mesure d'échantillonnage préférentiel) pour chaque étape i de la chaîne de Markov, \tilde{q}_i est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}[X_i = 0 | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}] \\ &= q_i \frac{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)}{u_i(x_1, \dots, x_{i-1})}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nous avons $X_i = 1$ avec la probabilité

$$1 - \tilde{q}_i = (1 - q_i) \frac{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)}{u_i(x_1, \dots, x_{i-1})}. \quad (2.5)$$

Le ratio de probabilités global (*likelihood ratio*) est le produit des ratios de probabilités de chaque étape i soit

$$L(x) = \prod_{i=1}^m L_i(x_i),$$

avec $L_i(x_i)$ le ratio de probabilités à l'étape i . On peut voir que :

$$\begin{aligned} L_i(x_i) &= x_i \frac{1 - q_i}{1 - \tilde{q}_i} + (1 - x_i) \frac{\tilde{q}_i}{q_i} \\ &= \frac{u_i(x_1, \dots, x_{i-1})}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)}. \end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant que la mesure d'échantillonnage préférentiel sous sa forme séquentielle fournit un estimateur à variance nulle. Soit $u = u_1(\emptyset)$ la défiabilité non conditionnelle du graphe \mathcal{G} .

Théorème 2.1 *Sous le plan d'échantillonnage préférentiel où les probabilités q_i sont remplacées par les probabilités conditionnelles \tilde{q}_i données par (2.4). On a $\tilde{\mathbb{P}}[\psi(X) = 1] = 1$ et $L(X) = u$, donc l'estimateur fourni par cet échantillonnage possède une variance nulle.*

Preuve: Nous montrons d'abord que $\tilde{\mathbb{P}}[\psi(X) = 1] = 1$. Soit x une configuration pour laquelle le système fonctionne, c'est-à-dire $\psi(x) = 0$, et supposons que k est l'indice de la première coordonnée de telle sorte que $\psi(x_1, \dots, x_k, \dots) = 0$ quelles que soient les valeurs de (x_{k+1}, \dots, x_m) , et pour les valeurs (fixes) de x_1, \dots, x_k . Dans ce cas, $u_{k+1}(x_1, \dots, x_k) = 0$, ce qui implique par (2.4) que ce particulier x_k a une probabilité nulle sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Par conséquent, chaque configuration x avec $\psi(x) = 0$ a une probabilité nulle. De plus le rapport de probabilité total est donné par :

$$\begin{aligned} L(x) &= \prod_{i=1}^m L_i(x_i) = \prod_{i=1}^m \frac{u_i(x_1, \dots, x_{i-1})}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)} \\ &= \frac{u_1(\emptyset)}{u_{m+1}(x_1, \dots, x_m)} = \frac{u}{u_{m+1}(x_1, \dots, x_m)}. \end{aligned}$$

Pour chaque configuration x avec $\psi(x) = 1$, nous avons $u_{m+1}(x_1, \dots, x_m) = \psi(x_1, \dots, x_m) = 1$, cependant $L(x) = u$. Cela veut dire qu'avec la probabilité 1, nous avons $\psi(X) = 1$ et $\psi(X)L(X) = u$. ■

Par manque d'informations, on ne peut implémenter en pratique cette méthode d'échantillonnage préférentiel à variance nulle, car elle nécessite la connaissance de toutes les valeurs u_{i+1} , et en particulier la valeur initiale que nous cherchons $u_1(\emptyset) = u$ qui est la défiabilité du réseau. Par conséquent ces valeurs peuvent être approchées, comme décrit dans la section 2.2. Une proposition d'approximation des valeurs des u_{i+1} fera l'objet du chapitre 3, [63].

2.2 Approximation de la mesure d'échantillonnage préférentiel à variance nulle

Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.1.2 nous ne possédons pas les vraies valeurs $u_{i+1}(\cdot)$, par conséquent ces valeurs doivent être approchées. Pour cela, le principe de l'approximation à variance nulle est décrit ci-dessous.

L'approximation à variance nulle consiste à remplacer les fonctions $u_{i+1}(\cdot)$ dans (2.4) par des fonctions approchées faciles à calculer ou à déterminer, que nous notons $\widehat{u}_{i+1}(\cdot)$.

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \mathbb{P}[X_i = 0] \\ &= \frac{q_i \widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)}{q_i \widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + (1 - q_i) \widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Intuitivement, si $\widehat{u}_{i+1}(\cdot)$ est proche de $u_{i+1}(\cdot)$ pour chaque i , l'échantillonnage sera effectué avec des probabilités qui ne sont pas trop loin des probabilités optimales, et la variance peut alors être réduite par un facteur important.

2.2.1 Algorithme séquentiel de l'échantillonnage préférentiel avec variance nulle approché

Nous résumons les étapes données dans la section 2.1.2, de la simulation séquentielle avec une approximation de la mesure d'échantillonnage préférentiel à variance nulle. On initialise une variable que nous appelons L à 1. A chaque étape i correspondant à l'état de l'arc e_i , la nouvelle probabilité \tilde{q}_i doit être calculée avec l'équation (2.6). A l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires uniformément distribués dans $]0,1[$, la procédure de l'échantillonnage fournit l'état de chaque arc e_i , $1 \leq i \leq v'$ avec v' le nombre d'arcs du graphe partiel \mathcal{G}'_i obtenu en fonction des arcs précédemment échantillonnés e_1, \dots, e_{i-1} . A chaque échantillonnage selon la nouvelle probabilité \tilde{q}_i , d'un arc e_i qui a pour une variable x_i , le rapport de probabilités $L_i(x_i)$ est calculé, si l'arc e_i est en bon fonctionnement, $L_i(1) = (1 - q_i)/(1 - \tilde{q}_i)$ et s'il est défaillant, $L_i(0) = q_i/\tilde{q}_i$. Une réalisation est favorable si tous les nœuds de \mathcal{K} ne sont pas dans la même composante connexe du graphe partiel \mathcal{G}' qui modélise la topologie du réseau, et le ratio de probabilité total est mis à jour par $L = L \times L_i$. Cet algorithme se formalise séquentiellement comme suit :

2.3 Robustesse de l'approximation de l'estimateur à variance nulle

Cette section est consacrée aux théorèmes établissant les conditions suffisantes sous lesquelles l'estimateur obtenu via les approximations $\widehat{u}_{i+1}(\cdot)$ est robuste sous le régime asymptotique où $\epsilon \rightarrow 0$, et quand le graphe reste fixé.

Algorithme 1 Algorithme séquentiel de l'échantillonnage préférentiel avec un estimateur à variance nulle approché.

```

 $L \leftarrow 1;$ 
pour  $i = 1$  to  $m$  faire
   $\tilde{q}_i \leftarrow \frac{q_i \hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)}{q_i \hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + (1 - q_i) \hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)};$ 
  générer  $U_i$  variable aléatoire uniforme dans  $(0, 1)$ ;
  si  $U_i < \tilde{q}_i$  alors
     $x_i \leftarrow 0;$      $L_i \leftarrow q_i / \tilde{q}_i;$ 
  sinon
     $x_i \leftarrow 1;$      $L_i \leftarrow (1 - q_i) / (1 - \tilde{q}_i);$ 
  finsi
   $L \leftarrow L \times L_i;$ 
fin pour
Retour  $Z = \psi(x_1, \dots, x_m) \times L;$ 

```

2.3.1 Erreur relative bornée de l'estimateur de la défiabilité

Le théorème 2.2 donne la condition pour laquelle notre mesure d'échantillonnage préférentiel donnée par (2.6) fournit un estimateur avec une erreur relative bornée.

Théorème 2.2 *Supposons que pour chaque i et $(x_1, \dots, x_i) \in \{0, 1\}^i$, $1 \leq i \leq m$, il existe une constante $a_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$ indépendante de ϵ de telle sorte que quand $\epsilon \rightarrow 0$ nous avons*

$$\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = a_{i+1}(x_1, \dots, x_i)u_{i+1}(x_1, \dots, x_i) + o(u_{i+1}(x_1, \dots, x_i)). \quad (2.7)$$

Sous cette condition, l'estimateur fourni par l'échantillonnage préférentiel avec le changement de probabilités défini par (2.6) possède la propriété d'erreur relative bornée.

Preuve: Pour vérifier que nous avons *ERB* d'après (1.7) nous aurons besoin de montrer que, $\text{Var}[\psi(X)L(X)] = O(u^2)$, ou identiquement $\tilde{\mathbb{E}}[\psi(X)L^2(X)] = O(u^2)$. D'après (2.3), nous avons

$$(1 - q_i)u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) = O(u_i(x_1, \dots, x_{i-1}))$$

et

$$q_i u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = O(u_i(x_1, \dots, x_{i-1})),$$

un de ces deux termes au moins étant du même ordre que $\Theta(u_i(x_1, \dots, x_{i-1}))$. Les constantes $a_{i+1}(x_1, \dots, 1)$ et $a_{i+1}(x_1, \dots, 0)$, étant indépendantes de ϵ , il existe une constante positive $b_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ indépendante de ϵ telle que

$$\begin{aligned}
& (1 - q_i)\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) + q_i\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) \\
&= (1 - q_i)a_{i+1}(x_1, \dots, 1)u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) + q_ia_{i+1}(x_1, \dots, 0)u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) \\
&\quad + o(u_{i+1}(x_1, \dots, 1) + u_{i+1}(x_1, \dots, 0)) \\
&= b_i(x_1, \dots, x_{i-1})u_i(x_1, \dots, x_{i-1}) + o(u_i(x_1, \dots, x_{i-1})).
\end{aligned}$$

Par exemple, si

$$(1 - q_i)u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) = o(u_i(x_1, \dots, x_{i-1})),$$

alors

$$\begin{aligned}
& a_{i+1}(x_1, \dots, 0)u_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \\
&= q_ia_{i+1}(x_1, \dots, 0)u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + o(u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1})),
\end{aligned}$$

et nous obtenons $b_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = a_{i+1}(x_1, \dots, 0)$.

La même chose dans le cas où nous avons,

$$q_iu_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = o(u_i(x_1, \dots, x_{i-1})),$$

alors

$$\begin{aligned}
& a_{i+1}(x_1, \dots, 1)u_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \\
&= (1 - q_i)a_{i+1}(x_1, \dots, 1)u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) + o(u_i(x_1, \dots, x_{i-1})),
\end{aligned}$$

et dans ce cas, la constante $b_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ est égale à $a_{i+1}(x_1, \dots, 1)$.

Le *ratio de probabilités* pour l'échantillonnage de l'arc i est

$$\begin{aligned}
L_i(X_i) &= \frac{(1 - q_i)\widehat{u}_{i+1}(X_1, \dots, X_{i-1}, 1) + q_i\widehat{u}_{i+1}(X_1, \dots, X_{i-1}, 0)}{\widehat{u}_{i+1}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i)} \\
&= \frac{b_i(X_1, \dots, X_{i-1})}{a_{i+1}(X_1, \dots, X_i)} \frac{u_i(X_1, \dots, X_{i-1})}{u_{i+1}(X_1, \dots, X_i)} + o(1).
\end{aligned}$$

On peut effectuer une majoration sur les quantités $b_i(X_1, \dots, X_{i-1})/a_{i+1}(X_1, \dots, X_i)$ pour i de 1 à m et toutes les configurations possibles (qui sont en nombre fini). Nous pouvons écrire alors

$$d = \max_{\{(x_1, \dots, x_i) : 1 \leq i \leq m\}} \frac{b_i(x_1, \dots, x_{i-1})}{a_{i+1}(x_1, \dots, x_i)}.$$

Nous avons $d < \infty$, puisque ce maximum est sur un ensemble fini. Le *ratio de probabilités* total satisfait donc

$$\begin{aligned}
L(X) &= \prod_{i=1}^m L_i(X_i) \\
&\leq \prod_{i=1}^m d \frac{u_i(X_1, \dots, X_{i-1})}{u_{i+1}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i)} + o(u) \\
&\leq d^m u + o(u).
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\tilde{\mathbb{E}}[\psi(X)L^2(X)] \leq \tilde{\mathbb{E}}[L^2(X)] \leq d^{2m}u^2 + o(u^2),$$

en raison de la somme finie dans l'espérance, et conclut la démonstration. \blacksquare

2.3.2 Erreur relative asymptotiquement nulle de l'estimateur de la défiabilité

En plus des conditions posées dans le théorème précédent pour obtenir la propriété d'*ERB*, nous proposons dans cette section des conditions suffisantes pour obtenir l'*ERAN*.

Rappelons que Σ est l'ensemble de tous les configurations (ou états) possibles du réseau. Nous définissons les deux ensembles de configurations du réseau, Σ_1 et Σ_0 , tels que :

$$\Sigma_1 = \{x \in \{0, 1\}^m : \psi(x) = 1 \text{ et } \tilde{\mathbb{P}}[X = x] = \Theta(1)\}$$

et

$$\Sigma_0 = \{x \in \{0, 1\}^m : \psi(x) = 1 \text{ et } \tilde{\mathbb{P}}[X = x] = o(1)\}.$$

Ainsi $\Sigma_1, \Sigma_0 \subset \Sigma$ et l'union de ces deux ensembles $\Sigma_1 \cup \Sigma_0$ est l'ensemble des configurations pour lesquelles le système ne fonctionne pas, de probabilité non rare sous $\tilde{\mathbb{P}}$ pour Σ_1 , mais restant rare pour Σ_0 . Nos conditions supplémentaires pour l'*ERAN* impliqueront seulement les configurations $x \in \Sigma_1$.

La preuve du théorème 2.2 conclut que

$$\tilde{\mathbb{E}}[\psi(X)L^2(X)] \leq \tilde{\mathbb{E}}[L^2(X)] \leq d^{2m}u^2 + o(u^2).$$

D'après la preuve du théorème 2.2 et d'après la définition donnée par (1.9), et pour que notre estimateur possède une *ERAN*, il faut que $d = 1$ pour obtenir

$$\tilde{\mathbb{E}}[\psi(X)L^2(X)] \leq \tilde{\mathbb{E}}[L^2(X)] = u^2 + o(u^2). \quad (2.8)$$

Deux propositions sont possibles pour obtenir $d = 1$:

- Soit $a_{i+1}(x_1, \dots, 1) = a_{i+1}(x_1, \dots, 0)$, $\forall a_{i+1}(x_1, \dots, 1)$ et $\forall a_{i+1}(x_1, \dots, 0)$,
- ou $a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1$ et pour $x'_i = 1 - x_i$,

$$(q_i(1 - x'_i) + (1 - q_i)x'_i)\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i) \\ = o((q_i(1 - x_i) + (1 - q_i)x_i)\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)).$$

ce qui nous donne $b_i(x_1, \dots, x_i) = a_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$.

Selon ces propositions, les conditions pour obtenir l'*ERAN* sont fournies par le théorème suivant :

Théorème 2.3 *En plus des hypothèses théorème 2.2, supposons que pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Sigma_1$ et pour chaque i , une des conditions suivantes soit satisfaite :*

- $a_{i+1}(x_1, \dots, 1) = a_{i+1}(x_1, \dots, 0)$

$$\frac{\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)} = \frac{\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)} + o(1), \quad (2.9)$$

- ou $x_i = 0$, $a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1$, et

$$(1 - q_i)\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) = o(q_i\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)) \quad (2.10)$$

- ou

$$x_i = 1, a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1, \text{ et}$$

$$q_i\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = o((1 - q_i)\widehat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)). \quad (2.11)$$

L'estimateur fourni par notre mesure d'échantillonnage préférentiel définie par (2.6) possède une erreur relative asymptotiquement nulle. Dans le cas général la condition donnée par (2.9) est vérifiée quand la proposition du théorème 2.2 est vérifiée avec $a_{i+1}(x_1, \dots, 0) = a_{i+1}(x_1, \dots, 1)$ pour tout $x \in \Sigma_1$ et pour tout i . Dans le cas particulier où la proposition du théorème 2.2 est vérifiée avec $a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1$ pour tout $x \in \Sigma_1$ et pour tout i , cela implique que la condition donnée par (2.9) est toujours vérifiée.

Preuve: Nous décomposons le moment d'ordre deux en deux termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}[\psi(X)L^2(X)] &= \sum_{x \in \Sigma_1} \psi(x)L^2(x)\widetilde{\mathbb{P}}[X = x] \\ &+ \sum_{x \in \Sigma_0} \psi(x)L^2(x)\widetilde{\mathbb{P}}[X = x]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour le second terme, suivant les mêmes arguments que nous avons employé dans le théorème 2.2, nous trouvons que nous avons une constante $d > 0$, indépendante de ϵ , telle que $L^2(x) \leq d^{2m}u^2 + o(u^2)$ et puisque Σ_0 est fini,

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \Sigma_0} \psi(x) L^2(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x] \\ & \leq (d^{2m}u^2 + o(u^2)) \sum_{x \in \Sigma_0} \psi(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x]. \end{aligned}$$

Mais cette dernière somme est égale à $o(1)$, parce qu'elle est la somme finie de plusieurs petits termes $o(1)$. En conséquence nous avons,

$$\sum_{x \in \Sigma_0} \psi(x) L^2(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x] = o(u^2).$$

Nous nous concentrons maintenant sur le premier terme du moment d'ordre deux donné par (2.12). Dans un cas spécial où les conditions du théorème 2.2 sont vérifiées avec $a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1$ pour tout $x \in \Sigma_1$ et pour tout i , nous pouvons prendre $b_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = 1$ et $d = 1$ dans cette même démonstration du théorème 2.3, et cela donne

$$\sum_{x \in \Sigma_1} \psi(x) L^2(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x] = u^2 + o(u^2). \quad (2.13)$$

Dans le cas général, quand (2.9) est vérifié, nous aurons $b_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = a_{i+1}(x_1, \dots, 1) = a_{i+1}(x_1, \dots, 0)$.

Lorsque l'une de ces conditions est satisfaite (2.10) ou (2.11), nous trouvons à partir de (2.7) et (2.3) que $b_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1$.

Donc dans les trois cas, nous pouvons prendre $d = 1$, et nous obtenons aussi (2.13).

Nous obtenons, en combinant les résultats des deux termes,

$$\widetilde{Var}[\psi(X)L(X)] \leq \tilde{\mathbb{E}}[L^2(X)] - u^2 = o(u^2),$$

ce qui conclut la démonstration. ■

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une approximation de l'estimateur à variance nulle basée sur un plan d'échantillonnage préférentiel que nous avons défini pour notre problème de la fiabilité des graphes statiques non orientés. Nous avons

assimilé notre plan d'échantillonnage à un processus de chaîne de Markov où les états de la chaîne correspondent aux configurations du graphe (graphe partiel obtenu au cours d'échantillonnage des arcs). Les transitions entre les états sont pondérées par les nouvelles probabilités d'échantillonnage préférentiel. Nous avons proposé les conditions pour lesquelles la propriété d'erreur relative bornée est vérifiée, l'estimateur basé sur notre plan d'échantillonnage préférentiel possède une erreur relative asymptotiquement nulle pour des conditions supplémentaires. La mesure d'échantillonnage préférentiel donnée par (2.6) est fonction des défiabilités des graphes conditionnels $\hat{u}_{i+1}(\cdot)$ que nous nous connaissons pas. Dans le chapitre suivant nous proposons une approximation de ces défiabilités $\hat{u}_{i+1}(\cdot)$ pour lesquelles les théorèmes cités ci-dessus seront applicables et nous obtenons un estimateur possédant les deux propriétés l'*ERB* et de l'*ERAN*.

Chapitre 3

L'échantillonnage préférentiel basé sur la coupe minimale

Dans le chapitre précédent nous avons proposé un plan d'échantillonnage préférentiel approchant l'estimateur à variance nulle, les défiabilités conditionnelles de la mesure d'échantillonnage préférentiel n'étant pas connues. Nous proposons dans ce chapitre une manière d'approcher ces défiabilités $u_{i+1}(\cdot)$, de sorte que nous obtenions de bonnes propriétés de l'estimateur. Rappelons que nous travaillons toujours sur le modèle de graphe présenté dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre nous commençons à présenter notre approximation des défiabilités conditionnelles qui sont basées sur les coupes minimales possédant une probabilité relativement grande. À chaque étape de la chaîne de Markov des sous-graphes sont obtenus après avoir supprimé les arcs qui ne fonctionnent pas, et comprimé les arcs qui fonctionnent, précédemment échantillonnés. Nous fournissons des preuves de bonnes propriétés de l'estimateur en utilisant les approximations proposées dans ce chapitre, sous le régime asymptotique défini dans le chapitre 2. Nous validons la robustesse de notre algorithme d'échantillonnage préférentiel basé sur la coupe minimale à probabilité maximale en la comparant à une méthode efficace, la seule fournissant un estimateur possédant l'*ERB* proposée dans la littérature [15], [17], et cela pour plusieurs exemples.

3.1 Approximation basée sur la coupe minimale à probabilité maximale

Le calcul de la nouvelle probabilité \tilde{q}_i de notre échantillonnage préférentiel donnée par l'équation (2.4) du chapitre 2 nécessite le calcul des défiabilités $u_{i+1}(\cdot)$ pour chaque i . Dans cette section nous allons présenter l'approximation de ces défiabilités. Cette approximation est basée sur la notion de coupe minimale à

probabilité maximale, donnée par le plus grand produit des probabilités de défaillances d'arcs minimum à couper pour assurer la défaillance du système. Nous appelons la méthode basée sur coupes minimales à probabilité maximale par *CoupeMin-ProbMax*.

Soit \mathcal{C} l'ensemble de toutes les coupes minimales du graphe \mathcal{G} (voir exemple 1. Nous dénotons $E(\delta)$, l'événement tel que tous les arcs de la coupe δ ne fonctionnent pas.

3.1.1 Défiabilité du réseau exprimée par les coupes minimales

Un réseau ne fonctionne pas, si au moins un arc sur chaque chemin reliant les nœuds dans \mathcal{K} ne fonctionne pas ou (non opérationnel). Autrement dit, un réseau n'est pas opérationnel si et seulement si tous les arcs d'au moins d'une coupe minimale ne sont pas opérationnels et donc les nœuds de \mathcal{K} ne sont pas dans la même composante connexe du graphe restant. La défiabilité du graphe peut s'écrire comme suit :

$$u = \mathbb{P} \left[\bigcup_{\delta \in \mathcal{C}} E(\delta) \right].$$

3.1.2 Coupe minimale à probabilité maximale

Comme nous l'avons mentionné précédemment la coupe minimale à probabilité maximale est la (ou une) coupe possédant la plus grande probabilité de défaillance, autrement dit, la coupe minimale à probabilité maximale est la coupe possédant la plus grande probabilité de défaillance par rapport aux probabilités de toutes les coupes minimales du graphe :

$$\delta = \arg \max_{\delta' \in \mathcal{C}} \mathbb{P}[E(\delta')].$$

La probabilité de défaillance d'une coupe est le produit des probabilités de défaillance des arcs de cette coupe. Nous proposons d'utiliser cette approximation. À chaque étape i d'échantillonnage des arcs du graphe \mathcal{G} , nous obtenons selon l'état des arcs précédemment échantillonnés (le vecteur (x_1, \dots, x_i) supposé fixe), un sous-graphe $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_i)$ que nous appelons graphe conditionnel. Le graphe conditionnel \mathcal{G}_i est obtenu par la suppression des arcs $j \leq i$ pour lesquels $x_j = 0$, et la compression des arcs j pour lesquels $x_j = 1$. Soit \mathcal{C}_i l'ensemble des coupes minimales du graphe \mathcal{G}_i qui ne contient pas des arcs $j \leq i$ pour lesquels $x_j = 1$. Soit δ_i la coupe minimale à probabilité maximale dans \mathcal{C}_i . Alors, la probabilité maximale de la coupe minimale peut être exprimée comme suit :

$$\hat{u}_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}[E(\delta_i)] = \max \{ \mathbb{P}[E(\delta)] : \delta \in \mathcal{C}_i \}.$$

À l'occurrence de l'événement $E(\delta)$ tous les arcs de δ_i sont défaillants, donc les nœuds dans \mathcal{K} ne sont pas connectés. Dans la section 3.3 nous allons voir que q_{δ_i} et $u_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$ ont le même ordre en terme de ϵ , c'est pour cette raison que notre choix d'approximations des défiabilités $u_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$ par $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$, s'est porté sur la *CoupeMin-Probamax*. Donc nous utiliserons $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$ comme approximations des $u_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$.

3.2 Algorithme de l'échantillonnage préférentiel basé sur *CoupeMin-Probamax*

Le processus d'échantillonnage basé sur la technique *CoupeMin-Probamax* et son algorithme sont fournis dans cette section.

Pendant le processus de d'échantillonnage des arcs du graphe \mathcal{G} , nous avons besoin de calculer à chaque étape i la nouvelle probabilité \tilde{q}_i donnée par l'équation 2.6 dans le chapitre 2. Pour le calcul de cette probabilité nous aurons besoin des valeurs des défiabilités $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$. Pour cela, à chaque étape i de la chaîne de Markov nous cherchons la coupe minimale $\delta(x_i)$ du graphe conditionnel $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$. À l'étape i , sachant l'état des arcs précédents ((x_1, \dots, x_{i-1}) est supposé fixe), nous échantillonons l'arc i du graphe $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$, si $x_i = 0$, l'arc e_i est supprimé et la coupe minimale correspondant à ce graphe $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, 0)$ est $\delta^- = \delta_i$, la probabilité de cette coupe est le produit des probabilités de défaillance de ces arcs, exprimée par $\mathbb{P}[E(\delta_i^-)]$, elle est égale à $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, 0)$ qui est l'approximation de la défiabilité du graphe $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, 0)$.

Nous ferons la même chose pour $x_i = 1$, nous comprimons l'arc e_i nous obtenons le graphe $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, 1)$ pour lequel nous cherchons la coupe minimale que nous notons par $\delta^+ = \delta_i$, calculons la probabilité de cette coupe et mettons $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, 1) = \mathbb{P}[E(\delta_i^+)]$, qui est l'approximation de la défiabilité du graphe $\mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, 1)$. Notons que ces coupes minimales peuvent être obtenues en un temps polynomial (voir [101]).

Algorithmiquement parlant, la coupe minimale à probabilité maximale est obtenue en utilisant l'algorithme *Ford-Fulkerson*, avec la capacité de chaque arc égale à $-\ln(1/q_i)$. Après avoir calculé les coupes minimales, nous générons des variables aléatoires indépendantes X_i en utilisant les probabilités \tilde{q}_i , calculons le rapport de probabilité correspondant. L'algorithme 2 fournit la procédure d'échantillonnage basée sur l'approximation *CoupeMin-Probamax*. Cet algorithme calcule les coupes minimales à probabilité maximale à chaque échantillonnage d'un arc utilisant l'algorithme *Ford-Fulkerson*, qui sont nécessaires pour le calcul des probabilités \tilde{q}_i . Avec les probabilités \tilde{q}_i , les rapports de probabilités L_i sont calculés pour chaque

i. Il fournit une seule réalisation de l'estimateur $Z = \psi(X)L(X)$. La défiabilité du graphe est obtenue en moyennant N réalisations de Z , l'intervalle de confiance est alors calculé suivant la forme fournie dans le chapitre 2.

Algorithme 2 Algorithme d'échantillonnage préférentiel basé sur *CoupeMin-ProbaMax*

```

 $L \leftarrow 1;$ 
pour  $i = 1$  to  $m$  faire
    trouver la coupe minimale  $\delta_i^-$  à probabilité maximale dans  $\mathcal{C}_i$  qui correspond
    à  $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0);$ 
     $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^-)];$ 
    trouver la coupe minimale  $\delta_i^+$  à probabilité maximale dans  $\mathcal{C}_i$  qui correspond
    à  $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1);$ 
     $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^+)];$ 
    calculer  $\tilde{q}_i$  avec (2.6);
    générer  $U_i$  une variable aléatoire uniforme sur  $(0, 1);$ 
    si  $U_i < \tilde{q}_i$  alors
         $x_i \leftarrow 0;$        $L_i \leftarrow q_i / \tilde{q}_i;$ 
    sinon
         $x_i \leftarrow 1;$        $L_i \leftarrow (1 - q_i) / (1 - \tilde{q}_i);$ 
    finsi
     $L \leftarrow L \times L_i;$ 
fin pour
Retour  $Z = \psi(x_1, \dots, x_m) \times L;$ 

```

3.3 Théorèmes et preuves des propriétés *ERB* et *ERAN*

Cette section présente les conditions pour lesquelles l'estimateur utilisant notre approximation basée sur la *CoupeMin-ProbaMax* possède les deux propriétés *ERB* et *ERAN*.

3.3.1 Probabilité maximale de la coupe minimale en fonction du paramètre de rareté ϵ

Dans le cas de probabilités originales q_i dépendantes de ϵ , les probabilités des coupes minimales dépendent aussi de ϵ , et l'ensemble des coupes minimales à probabilités maximales sont des fonctions de ϵ . Nous montrons ci-dessous que, lorsque

$\epsilon \rightarrow 0$, cet ensemble devient par la suite fixé. Cet ensemble limité sera appelé l'ensemble des coupes minimales avec *probabilité maximale asymptotiquement*. Puis, pour l'analyse asymptotique, nous supposons que ϵ est suffisamment petit pour que les coupes minimales avec une probabilité maximale soient les mêmes que les coupes minimales avec une probabilité maximale asymptotiquement.

Pour chaque $\delta \in \mathcal{C}$, la probabilité de $E(\delta)$ est :

$$\mathbb{P}[E(\delta)] = \prod_{i \in \delta} q_i = a_\delta \epsilon^{c_\delta}, \quad (3.1)$$

où

$$a_\delta = \prod_{i \in \delta} a_i \quad \text{et} \quad c_\delta = \sum_{i \in \delta} b_i. \quad (3.2)$$

Lemme 3.1 *Pour un modèle de graphe \mathcal{G} non défaillant, où les probabilités individuelles sont écrites sous la forme donnée par (1.1), nous avons $u = \Theta(\epsilon^c)$ avec $c = \min_{\delta \in \mathcal{C}} c_\delta$. Nous avons aussi $c > 0$ (la défiabilité du système est un événement rare) si et seulement si chaque coupe minimale contient au moins un arc i avec $b_i > 0$.*

Preuve: Appliquons la formule d'inclusion-exclusion suivante pour u nous avons

$$\begin{aligned} u &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^s [E(\delta^i)]\right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq s} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k [E(\delta^{i_j})]\right) \right) \\ &= a\epsilon^c + o(\epsilon^c), \end{aligned}$$

avec s le cardinal de l'ensemble des coupes minimales \mathcal{C} , et représente le nombre de coupes minimales, $a = \sum_{\delta \in \mathcal{C}} a_\delta$, ce qui nous donne la défiabilité du système est du même ordre que la coupe minimale à probabilité maximale

$$u = \Theta(\epsilon^c),$$

avec $c = \min_{\delta \in \mathcal{C}} c_\delta$.

Nous avons aussi $c > 0$ si et seulement si $c_\delta > 0$ pour toute coupe $\delta \in \mathcal{C}$, et chaque coupe minimale δ contient au moins un arc i qui ne fonctionne pas, avec $b_i > 0$. ■

Nous allons illustrer par l'exemple suivant l'ensemble des coupes minimales à probabilités maximales qui dépendent de ϵ .

Exemple 3 Supposons que les probabilités des arcs du graphe représenté par la figure 3.5 sont égales à $q_1 = q_2 = \epsilon$, et $q_3 = q_4 = 20\epsilon^2$. Pour que les nœuds s et t du graphe, ne soient pas connectés, quatre coupes minimales sont possibles. Utilisons les indices des arcs contenant chaque coupe, nous avons $\delta_{1,2}$, $\delta_{1,4}$, $\delta_{2,3}$, et $\delta_{3,4}$. Les probabilités de ces coupes sont indiquées comme suit : $\mathbb{P}[E(\delta_{1,2})] = \epsilon^2$, $\mathbb{P}[E(\delta_{1,4})] = \mathbb{P}[E(\delta_{2,3})] = 20\epsilon^3$, $\mathbb{P}[E(\delta_{3,4})] = 400\epsilon^4$. Quand $\epsilon = 0.1$, nous avons $\mathbb{P}[E(\delta_{1,2})] = 0.01 < \mathbb{P}[E(\delta_{1,4})] = \mathbb{P}[E(\delta_{2,3})] = 0.02 < \mathbb{P}[E(\delta_{3,4})] = 0.04$, par contre si $\epsilon < 1/20$, l'ordre est inversé $\mathbb{P}[E(\delta_{1,2})] > \mathbb{P}[E(\delta_{1,4})] = \mathbb{P}[E(\delta_{2,3})] > \mathbb{P}[E(\delta_{3,4})]$. Cela nous montre que les coupes minimales à probabilités maximales pour cette exemple dépendent de ϵ .

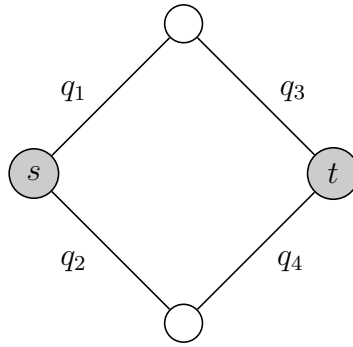


FIGURE 3.1 – Graphe avec quatre arcs.

Pour le cas d'un graphe **non-homogène** où les probabilités des arcs ne sont pas identiques, nous considérons l'ensemble des coupes δ pour lesquelles $c_\delta = c$ (l'exposant le plus petit), et parmi elles, nous allons prendre celles qui possèdent le plus grand a_δ , soit $a_\delta = a_0$. Soit ϵ_0 la borne maximale pour laquelle toute valeur ϵ inférieure à $\epsilon_0 > 0$, l'ensemble des coupes minimales à probabilité maximale est exactement l'ensemble des coupes minimales à probabilités maximales asymptotiquement. ϵ_0 est donnée par :

$$\epsilon_0 = \max\{\epsilon \in \mathbb{R} \text{ sachant que } a_0\epsilon^c \geq a_\delta\epsilon^{c_\delta} \text{ pour tout } \delta \in \mathcal{C}\}.$$

Lemme 3.2 *Pour un modèle de graphe non défaillant, où les probabilités individuelles sont écrites sous la forme donnée par (1.1), $\exists \epsilon_0$; tel que si $\epsilon \leq \epsilon_0$, l'ensemble des coupes minimales avec la probabilité maximale est exactement l'ensemble des coupes minimales avec la probabilité $a_0\epsilon^c + o(\epsilon^c)$.*

Preuve:

$\epsilon_0 > 0$ vient du fait que le nombre de coupes minimales est fini et de nos définitions de c et a_0 .

$$\epsilon_0 = \min_{2 \leq k \leq K} \left(\frac{a_{\gamma_1}}{a_{\gamma_k}} \right)^{\frac{1}{c_{\gamma_k} - c_{\gamma_1}}}.$$

Puis, à partir

$$a_{\gamma_k} \epsilon^{c_{\gamma_k}} \geq a_{\gamma_{k+1}} \epsilon^{c_{\gamma_{k+1}}} \iff \epsilon \leq \left(\frac{a_{\gamma_k}}{a_{\gamma_{k+1}}} \right)^{\frac{1}{c_{\gamma_{k+1}} - c_{\gamma_k}}},$$

l'ensemble des coupes minimales avec la probabilité maximale est exactement l'ensemble des coupes minimales avec la probabilité $a_0 \epsilon^c = a_{\gamma_1} \epsilon^{c_{\gamma_1}}$. ■

3.3.2 Propriété d'erreur relative bornée

Nous allons démontrer par le théorème 3.1 que notre approximation basée sur la coupe minimale à probabilité maximale fournit un estimateur avec erreur relative bornée.

Théorème 3.1 *L'approximation CoupeMin-ProbMax que nous avons proposé satisfait toujours les conditions du théorème 2.2. En conséquence, elle fournit un plan d'échantillonnage préférentiel avec la propriété de l'erreur relative bornée.*

Preuve: Le lemme 3.1 peut être appliqué à n'importe quel graphe \mathcal{G}_i obtenu à l'étape i de l'algorithme 2. En particulier nous avons

$$u_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = \Theta(\epsilon^{c_{i+1}(x_1, \dots, x_i)}) \quad (3.3)$$

où

$$c_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = \min \{ d : \mathbb{P}[E(\delta)] = \Theta(\epsilon^d) \text{ pour une certaine coupe minimale } \delta \text{ de } \mathcal{G}_{i+1}(x_1, \dots, x_i) \}.$$

Les constantes $c_{i+1}(x_1, \dots, x_i) \geq 0$ sont indépendante de ϵ , mais dépendent du graphe partiel \mathcal{G}_{i+1} .

Fixons l'état des arcs X_1, \dots, X_i à x_1, \dots, x_i , nous obtenons avec l'approximation *CoupeMin-ProbMax* ce qui suit ;

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i) &= \Theta(\epsilon^{c_{i+1}(x_1, \dots, x_i)}) \\ &= \Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, x_i)). \end{aligned}$$

L'approximation *CoupeMin-ProbMax* est du même ordre que les valeurs réelles des défiabilités. Ainsi, les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées. ■

3.3.3 Propriété d'erreur relative asymptotiquement nulle dans le cas général

Dans cette section nous présentons un théorème pour vérifier les conditions afin d'avoir un plan d'échantillonnage préférentiel basé sur la *CoupeMin-ProbMax* avec la propriété d'erreur relative asymptotiquement nulle.

Théorème 3.2 *Sous le plan d'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation CoupeMin-ProbMax, supposons que pour chaque $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Sigma_1$ et pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$, le graphe $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_i)$ contient seulement une coupe minimale avec la probabilité $\Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, x_i))$, et une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

(i) *le graphe $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i)$ contient seulement une coupe minimale avec la probabilité $\Theta(\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i))$,*

ou

une des deux conditions suivantes, où un des deux termes de la défiabilité totale est négligeable devant l'autre. (ii) $x_i = 0$ et

$$(1 - q_i)\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) = o(q_i\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)), \quad (3.4)$$

ou

(iii) $x_i = 1$ et

$$q_i\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = o((1 - q_i)\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)). \quad (3.5)$$

Avec ces trois conditions nous obtenons la même constante au numérateur et au dénominateur du rapport de probabilités à chaque étape i , la simplification de ces constantes nous donne un rapport de probabilité pour chaque réalisation égal à la défiabilité du graphe. Alors, les hypothèses du théorème 2.3 sont satisfaites, et par conséquent nous avons un plan d'échantillonnage préférentiel basé sur la CoupeMin-ProbMax, possédant la propriété de l'erreur relative asymptotiquement nulle.

Preuve: Parce que nous avons une seule coupe minimale avec la probabilité $\Theta(u_i(x_1, \dots, x_{i-1}))$ dans \mathcal{G}_{i-1} , la somme finie des probabilités des autres coupes minimales est $o(u_i(x_1, \dots, x_{i-1}))$. Ainsi, pour tous $i \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$\frac{\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)} = 1 + o(1).$$

Similairement, la condition où il y a aussi une seule coupe minimale avec la probabilité $\Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, 1 - x_i))$ correspond à

$$\frac{\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i)}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i)} = 1 + o(1),$$

ce qui implique, que l'équation (2.9) est vérifiée, alors que les conditions (3.4) et (3.5) correspondent exactement à (2.10) et (2.11). Ensuite, le résultat découle du théorème 2.3. ■

3.3.4 Théorème de l'erreur relative asymptotiquement nulle dans le cas homogène

Théorème 3.3 *Nous supposons le cas d'un graphe homogène, dont les défiabilités des arcs sont identiques, tel que pour tout arc i , la probabilité de la défiabilité $q_i = \epsilon$. Si nous utilisons l'approximation basée sur CoupeMin-ProbaMax pour le cas de graphe homogène et si pour chaque $x \in \Sigma_1$ et chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$, nous avons une des conditions suivantes qui soit vérifiée :*

(i) *Le nombre de coupes minimales avec la probabilité $\Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0))$ dans le graphe $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)$ est le même nombre de coupes minimales avec la probabilité $\Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1))$ dans le graphe $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)$;*

ou

(ii) *Le graphe $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_i)$ contient une seule coupe minimale avec la probabilité $\Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, x_i))$, et*

soit

$x_i = 0$ et

$$(1 - q_i)\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) = o(q_i\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)), \quad (3.6)$$

ou

$x_i = 1$ et

$$q_i\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = o((1 - q_i)\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)). \quad (3.7)$$

Alors, les hypothèses du théorème 2.3 sont satisfaites, et notre plan d'échantillonnage basé sur nos approximations CoupeMin-ProbaMax possède la propriété d'erreur relative asymptotiquement nulle.

Preuve: Soit $s_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$ le nombre de coupes minimales avec la probabilité $\Theta(u_{i+1}(x_1, \dots, x_i))$. Sous la première condition, nous avons $s_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = s_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)$. De la même façon que la preuve du Théorème (3.1),
 $u_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = s_{i+1}(x_1, \dots, x_i)\epsilon^{c_{i+1}(x_1, \dots, x_i)} + o(u_{i+1}(x_1, \dots, x_i))$ quand
 $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = \epsilon^{c_{i+1}(x_1, \dots, x_i)}$. Donc nous aurons,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)} &= \frac{1}{s_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)} + o(1), \\ \frac{\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)}{u_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)} &= \frac{1}{s_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)} + o(1), \end{aligned}$$

ce qui correspond à (2.9). L'ensemble des deux autres conditions, (3.6), et (3.7) correspondent à (2.10), et (2.11), respectivement. Les conditions du théorème (2.3) sont alors vérifiées. ■

3.4 Exemples théoriques

Cette section nous permet d'analyser en détails le comportement de notre approximation *CoupeMin-ProbaMax* sur de petits réseaux. Pour tous nos exemples nous supposons que les probabilités des arcs sont identiques (cas homogène). L'ordre d'échantillonnage des arcs se fait selon leur numérotation.

Exemple 4 Nous considérons le graphe de la figure 3.2, où les arcs sont homogènes avec la probabilité $q_i = \epsilon$ pour $i = 1, 2, 3$. L'objectif est de calculer la probabilité de déconnexion des deux nœuds s et t . Pour ce graphe seulement trois

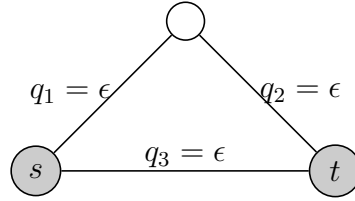


FIGURE 3.2 – Graphe avec trois arcs.

configurations engendrent la déconnexion des deux nœuds s et t : $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, et $(1, 0, 0)$. La défiabilité du système est $u = \epsilon^3 + 2\epsilon^2(1 - \epsilon) = 2\epsilon^2 - \epsilon^3$. Si nous calculons les valeurs de défiabilité à chaque étape de la simulation séquentielle en échantillonnant l'arc 1, puis le 2 puis le 3 nous obtenons $u_2(0) = \epsilon$, $u_2(1) = \epsilon^2$, $u_3(0, 0) = \epsilon$, $u_3(0, 1) = \epsilon$, $u_3(1, 0) = \epsilon$, et $u_3(1, 1) = 0$. À l'étape 1, nous aurons besoin de calculer $\hat{u}_2(0)$ et $\hat{u}_2(1)$ pour le calcul de \tilde{q}_1 . L'échantillonnage du premier arc nous donne :

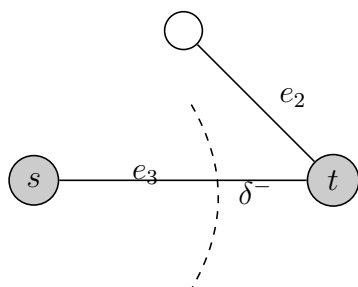
Pour $x_1 = 0$, la coupe minimale δ_1^- contient seulement l'arc 3, et la probabilité de sa défiabilité est $\hat{u}_2(0) = \epsilon = u_2(0)$.

Pour $x_1 = 1$, la coupe minimale δ_1^+ contient les deux arcs 2 et 3, et la probabilité $\hat{u}_2(1) = \epsilon^2 = u_2(1)$. Calculons la probabilité de sa défiabilité \tilde{q}_1 nous obtenons

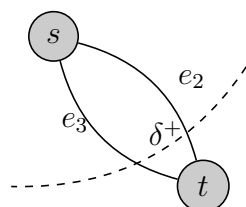
$$\tilde{q}_1 = \frac{q_1 \hat{u}_2(0)}{q_1 \hat{u}_2(0) + (1 - q_1) \hat{u}_2(1)} = \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (1 - \epsilon)\epsilon^2} = \frac{1}{2 - \epsilon}.$$

De la même façon, nous obtenons $\hat{u}_3(0, 0) = \epsilon$, $\hat{u}_3(0, 1) = \epsilon$, $\hat{u}_3(1, 0) = \epsilon$, et $\hat{u}_3(1, 1) = 0$, qui sont toutes égales à leurs valeurs correspondantes de $u_i(\cdot)$. Les coupes minimales à probabilité maximale pour différentes étapes sont représentées

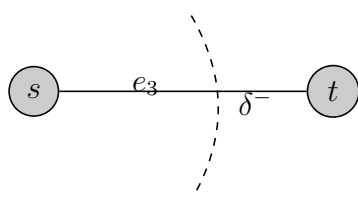
(a) Coupe minimale à probabilité maximale pour $x_1 = 0$



(b) Coupe minimale à probabilité maximale pour $x_1 = 1$



(c) Coupe minimale à probabilité maximale pour $x_1 = 0$ et $(x_2 = 0 \text{ ou } x_2 = 1)$



(d) Coupe minimale à probabilité maximale pour $x_1 = 1, x_2 = 0$

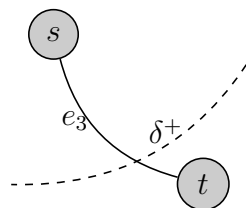


FIGURE 3.3 – Coupes minimales à probabilité maximales du graphe de la figure 3.2.

par la figure 3.3. Nous avons $\tilde{q}_2 = \epsilon$ quand $x_1 = 0$, et $\tilde{q}_2 = 1$ quand $x_1 = 1$. Les valeurs de u_4 , et \hat{u}_4 sont égales à la valeur de ψ , car il n'y a pas de connexion entre s et t ; et nous avons $\tilde{q}_3 = 1$ sur tous les chemins qui n'ont pas une probabilité nulle.

La figure 3.4 représente le graphe de transitions de la chaîne de Markov utilisant notre plan d'échantillonnage basé sur les coupes minimales à probabilité maximale.

Le premier nœud à gauche représente l'état initial, et les nœuds à droite sont les états finaux ou les configurations du graphe. Les nœuds en gris sont les configurations de graphe où s et t ne sont pas connectés. Pour cet exemple nous avons pour tout $i = 1, \dots, m$, $\hat{u}_{i+1} = u_{i+1}$, ce qui implique que l'estimateur basé sur les approximations à variance nulle est exactement celui à variance nulle.

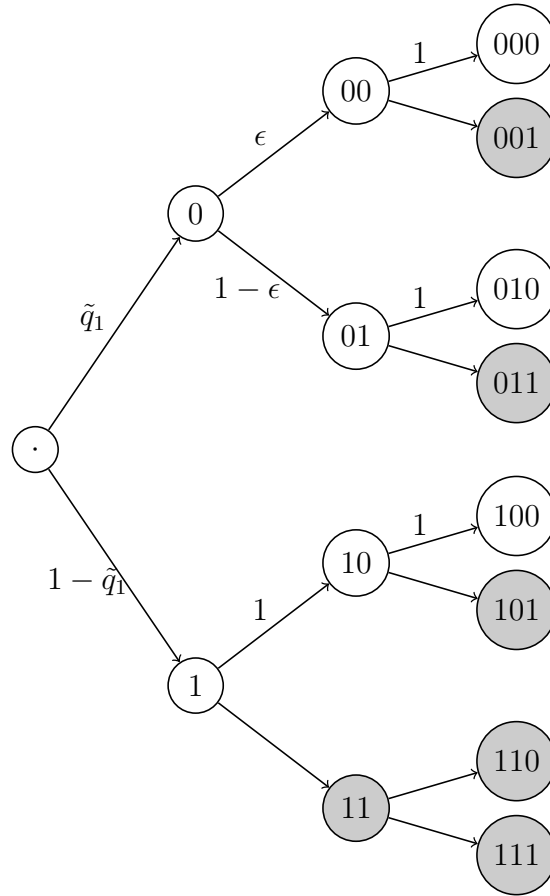


FIGURE 3.4 – Graphe de transitions de la chaîne de Markov pour l'exemple 4.

Exemple 5 Nous considérons l'exemple 3 donné par la figure 3.5, l'objectif est de calculer la probabilité que les deux nœuds s et t ne soient pas connectés. Les probabilités des arcs sont identiques, avec $q_i = \epsilon$ pour $i = 1, \dots, 4$. s et t ne sont pas connectés pour neuf configurations sur les seize configurations possibles de quatre arcs. La défiabilité du graphe est $u = 4\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$. Les vraies valeurs

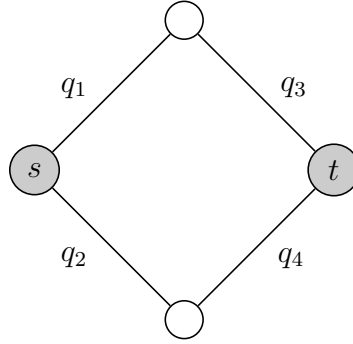


FIGURE 3.5 – Graphe avec quatre arcs.

de probabilités des défiabilités des arcs pour ce graphe sont, $u_2(0) = 2\epsilon - \epsilon^2$, $u_2(1) = 2\epsilon^2 - \epsilon^3$, $u_3(0, 0) = 1$, $u_3(0, 1) = \epsilon$, $u_3(1, 0) = \epsilon$, et $u_3(1, 1) = \epsilon^2$. Les valeurs de ces probabilités calculées par notre approximation *CoupeMin-ProbMax* sont, $\hat{u}_2(0) = \epsilon$, $\hat{u}_2(1) = \epsilon^2$, $\hat{u}_3(0, 0) = 1$, $\hat{u}_3(0, 1) = \epsilon$, $\hat{u}_3(1, 0) = \epsilon$, et $\hat{u}_3(1, 1) = \epsilon^2$. Les valeurs de \hat{u}_4 sont exactement les mêmes que celles de u_4 .

Nous remarquons que $\hat{u}_2(0) \approx u_2(0)/2$ et $\hat{u}_2(1) \approx u_2(1)/2$, tandis que $\hat{u}_{i+1}(\cdot) = u_{i+1}(\cdot)$ pour les autres arcs. Ainsi, les conditions du théorème 2.2 sont satisfaites, mais nous n'avons pas $a_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = 1$ pour tous les i , car $a_2(0) = a_2(1) = 1/2$. Les conditions du théorème 2.3 sont aussi satisfaites, car $\hat{u}_2(0)/u_2(0) = \hat{u}_2(1)/u_2(1) + o(1)$, ce qui nous fournit donc une *erreur relative asymptotiquement nulle*.

Pour cet exemple particulier nous pouvons vérifier que le plan d'échantillonnage préférentiel avec notre approximation donne une variance nulle, même si nous avons $\hat{u}_2 \neq u_2$. En effet la défiabilité du premier arc et la probabilité calculée par notre approximation sont exactement les mêmes comme nous allons le voir ci-dessous.

La probabilité de défiabilité du premier arc calculée par notre approximation est :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \frac{q_1 \hat{u}_2(0)}{q_1 \hat{u}_2(0) + (1 - q_1) \hat{u}_2(1)} \\ &= \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (1 - \epsilon)\epsilon^2} = \frac{1}{2 - \epsilon}, \end{aligned}$$

qui est exactement la même avec la défiabilité du premier arc calculée en utilisant l'échantillonnage préférentiel avec une variance nulle :

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= \frac{q_1 u_2(0)}{q_1 u_2(0) + (1 - q_1) u_2(1)} \\ &= \frac{\epsilon(2\epsilon - \epsilon^2)}{\epsilon(2\epsilon - \epsilon^2) + (1 - \epsilon)(2\epsilon^2 - \epsilon^3)} = \frac{1}{2 - \epsilon}.\end{aligned}$$

Nous allons présenter deux autres exemples, le premier concerne le cas où le théorème 3.3 s'applique et possède une erreur relative asymptotiquement nulle et le second possède seulement l'erreur relative bornée.

Exemple 6 Nous considérons le graphe donnée par la figure 3.6, où nous voulons calculer la probabilité que les nœuds s et t ne soient pas connectés. Pour cet exemple aussi nous supposons que les probabilités des arcs sont identiques et $q_i = \epsilon$ pour $i = 1, \dots, 5$. Nous avons dans le tableau 3.1 les défiabilités et les

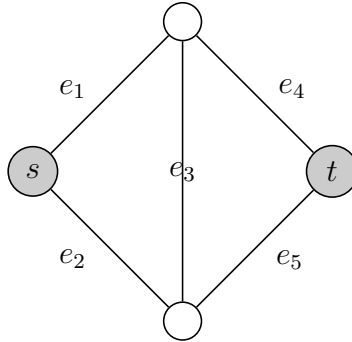


FIGURE 3.6 – Graphe non orienté ou bidirectionnel.

approximations *CoupeMin-ProbMax* pour différentes étapes de la méthode. Si nous comparons ces deux probabilités nous remarquons que leurs valeurs sont du même ordre.

Parmi les 32 états possibles du graphe, nous avons seize configurations engendrant la non connexion des deux nœuds s et t , leurs probabilités originales et leurs probabilités avec *CoupeMin-ProbMax*, sont données dans le tableau 3.2. Nous n'avons que deux configurations, $(0, 0, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 0, 0)$, qui ont la probabilité $\Theta(1)$ sous l'échantillonnage préférentiel, nous pouvons constater que les conditions du théorème 3.3 sont vérifiées. Pour vérifier directement l'*ERAN*, nous avons calculé pour chaque configuration les valeurs $L^2(x)\tilde{\mathbb{P}}[X = x]$ nécessaires pour le calcul de la variance de l'estimateur.

À partir des données du tableau 3.2 nous obtenons la défiabilité du graphe qui est égale à

$$u = 2\epsilon^2 + 2\epsilon^3 - 5\epsilon^4 + 2\epsilon^5.$$

La variance égale à

$$\sum_{x \in \{0,1\}^5} L^2(x) \psi(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x] = 4\epsilon^4 + o(\epsilon^4),$$

alors le carré de l'erreur relative est

$$\frac{1}{u^2} \sum_{x \in \{0,1\}^5} \psi(x) L^2(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x] - 1 = o(1),$$

en accord avec le théorème (3.3).

TABLE 3.1 – Défiabilités et leurs approximations *CoupeMin-ProbaMax* pour l'exemple 6.

état (x_1, \dots, x_i)	$u_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$	$\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$
(0)	$\epsilon + o(\epsilon)$	ϵ
(1)	$\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$	ϵ^2
(0, 0)	1	1
(0, 1)	$2\epsilon^2 - \epsilon^3$	ϵ^2
(1, 0)	$2\epsilon^2 - \epsilon^3$	ϵ^2
(1, 1)	ϵ^2	ϵ^2
(0, 1, 0)	ϵ	ϵ
(0, 1, 1)	ϵ^2	ϵ^2
(1, 0, 0)	ϵ	ϵ
(1, 0, 1)	ϵ^2	ϵ^2
(1, 1, 0)	ϵ^2	ϵ^2
(1, 1, 1)	ϵ^2	ϵ^2
(0, 1, 0, 0)	ϵ	ϵ
(0, 1, 0, 1)	ϵ	ϵ
(0, 1, 1, 0)	ϵ	ϵ
(0, 1, 1, 1)	0	0
(1, 0, 0, 0)	1	1
(1, 0, 0, 1)	0	0
(1, 0, 1, 0)	ϵ	ϵ
(1, 0, 1, 1)	0	0
(1, 1, 0, 0)	ϵ	ϵ
(1, 1, 0, 1)	0	0
(1, 1, 1, 0)	ϵ	ϵ
(1, 1, 1, 1)	0	0

TABLE 3.2 – Probabilités originales et modifiées des 16 configurations x pour lesquelles $\psi(x) = 1$, pour l'exemple 6.

Configuration	$\mathbb{P}[X = x]$	$\mathbb{P}[X = x]$	$L^2(x)\mathbb{P}[X = x]$
(0, 0, 0, 0, 0)	ϵ^5	$\frac{\epsilon^3}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^7(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 0, 0, 1)	$\epsilon^4(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon^2(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^6(1-\epsilon)(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 0, 1, 0)	$\epsilon^4(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon^2(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^6(1-\epsilon)(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 0, 1, 1)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 1, 0, 0)	$\epsilon^4(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon^2(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^6(1-\epsilon)(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 1, 1, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 1, 0, 1)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 0, 1, 1, 1)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^3$	$\frac{(1-\epsilon)^3}{(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^3(2-\epsilon)(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 1, 0, 0, 0)	$\epsilon^4(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon^2(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)^2(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^6(1-\epsilon)(2-\epsilon)^2(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 1, 0, 1, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^2(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^2(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(0, 1, 1, 0, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^2(1+\epsilon-\epsilon^2)}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^2(1+\epsilon-\epsilon^2)$
(1, 0, 0, 0, 0)	$\epsilon^4(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon^2(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^6(1-\epsilon)(2-\epsilon)^2$
(1, 0, 0, 0, 1)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^2$
(1, 0, 1, 0, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^2$
(1, 1, 0, 0, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)^2$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)$
(1, 1, 1, 0, 0)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^3$	$\frac{(1-\epsilon)^3}{(2-\epsilon)}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)$

Exemple 7 Nous considérons une variation de l'exemple 5 figure 3.7.

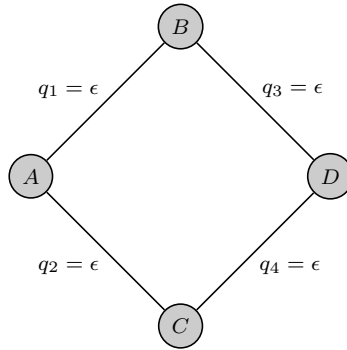


FIGURE 3.7 – Graphe avec quatres arcs, $\mathcal{K} = \{A, B, C, D\}$.

Les nœuds terminaux \mathcal{K} sont tous les nœuds du graphe, c'est à dire $(A, B, C, D) \in \mathcal{K}$. Le système fonctionne seulement si tous les nœuds dans \mathcal{K} sont connectés. Le système ne fonctionne pas si et seulement si au moins deux arcs sont défectueux. Il y a encore seize configurations possibles pour cet exemple, parmi elles onze configurations engendrent la déconnexion des nœuds de \mathcal{K} .

La défiabilité du réseau est $u = 6\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$.

Le Tableau 3.3 nous donne les probabilités originales et modifiées des onze configurations ainsi que les valeurs de $L^2(x)\tilde{\mathbb{P}}[X = x]$.

TABLE 3.3 – Probabilités originales et modifiées pour les 11 configurations x pour lesquelles $\psi(x) = 1$, pour l'exemple 7.

Configuration	$\mathbb{P}[X = x]$	$\tilde{\mathbb{P}}[X = x]$	$L^2(x)\tilde{\mathbb{P}}[X = x]$
(0, 0, 0, 0)	ϵ^4	$\frac{\epsilon^2}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^6(2-\epsilon)^2$
(0, 0, 0, 1)	$\epsilon^3(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)(2-\epsilon)^2$
(0, 0, 1, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)(2-\epsilon)^2$
(0, 0, 1, 1)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	$\frac{(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^2$
(0, 1, 0, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)^3}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)(2-\epsilon)^3$
(0, 1, 0, 1)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	$\frac{(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^3}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^3$
(0, 1, 1, 0)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	$\frac{(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^3}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^3$
(1, 0, 0, 0)	$\epsilon^3(1-\epsilon)$	$\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)^3}$	$\epsilon^5(1-\epsilon)(2-\epsilon)^3$
(1, 0, 0, 1)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	$\frac{(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^3}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^3$
(1, 0, 1, 0)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	$\frac{(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^3}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^3$
(1, 1, 0, 0)	$\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	$\frac{(1-\epsilon)^2}{(2-\epsilon)^2}$	$\epsilon^4(1-\epsilon)^2(2-\epsilon)^2$

Si nous prenons par exemple les défiabilités à l'étape $i = 2$ nous avons, $u_3(0, 0) = \hat{u}_3(0, 0) = 1$, mais $u_3(0, 1) = 2\epsilon + o(\epsilon)$ tandis que $\hat{u}_3(0, 1) = \epsilon$.

Le calcul de la probabilité de défiabilité du deuxième arc avec l'échantillonnage préférentiel à variance nulle et avec l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CoupeMin-ProbMax*, nous donne respectivement,

$$q_2 = \epsilon u_3(0, 0) / (\epsilon u_3(0, 0) + (1 - \epsilon) u_3(0, 1)) = 1/3 + o(1), \text{ et } \tilde{q}_2 = 1/2 + o(1).$$

Ainsi, nous avons *ERB* grace au théorème 3.1, mais les conditions des théorèmes 3.2 ou 3.3 ne sont pas vérifiées et nous pouvons par exemple le constater à travers la configuration (0, 0, 1, 1).

Le calcul suivant de l'erreur relative nous montre que l'*ERAN* n'est pas vérifiée :

Le carré de l'erreur relative calculé par les données du tableau 3.3 est donné par

$$\frac{1}{u^2} \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) L^2(x) \tilde{\mathbb{P}}[X = x] - 1 = \frac{1}{9} + o(1).$$

L'erreur relative pour cet exemple doit converger vers la valeur 1/3.

3.5 Résultats numériques

Pour la validation des aspects théoriques de notre approximation basée sur la coupe minimale à probabilité maximale, nous présentons dans cette section des résultats numériques qui nous permettent d'illustrer l'évolution des erreurs relatives. Nous appliquerons notre plan d'échantillonnage proposé dans le chapitre précédent avec l'utilisation des approximations basées sur la coupe minimale à probabilité maximale, sur les petits réseaux présentés et analysés dans la section 3.4 pour vérifier les propriétés, mais également sur de très grand réseaux dont nous connaissons leurs défiabilités. Nous comparons nos résultats avec les résultats de quelques exemples, donnés par la méthode basée sur les chemins pour plus de détails sur cette méthode voir [17]. La méthode basée sur les chemins que nous notons par « *Mch* » qui fournit une *erreur relative bornée* mais seulement pour le cas des graphes homogènes (où les probabilités des arcs sont identiques), qui n'est pas une condition pour notre méthode d'échantillonnage préférentiel basé sur la coupe minimale, car elle fournit toujours une erreur relative bornée.

Exemple 8 Le Tableau 3.4 montre les résultats numériques empiriques pour l'exemple 6. La taille de l'échantillon utilisé dans tous nos résultats est $N = 5 \times 10^4$. Nous considérons que tous les arcs de nos exemples ont les mêmes probabilités individuelles $q_i = \epsilon$. Pour tous nos exemples, l'ordre d'échantillonnage des arcs dépend de leur numérotation. Nous avons dans la première colonne du tableau les quatre différentes valeurs de $q_i = \epsilon$, qui représentent les défiabilités élémentaires ou individuelles des arcs, pour lesquelles nous avons obtenu par la méthode l'échantillonnage préférentiel basée sur *CoupeMin-ProbaMax* : l'estimateur de la défiabilité du système \hat{u}_N donné par la seconde colonne, l'intervalle de confiance \hat{I} à 95%, l'estimation $\hat{\sigma}_{EP}$ de l'écart type pour une seule réalisation $\psi(X)L(X)$, la division des deux estimations de l'écart-type et de la défiabilité nous donne l'estimation de l'erreur relative \widehat{Re}_{EP} . Le tableau nous permet aussi de comparer pour chaque valeur de ϵ nos estimations $\hat{\sigma}_{EP}$ et \widehat{Re}_{EP} fournies par *CoupeMin-ProbaMax* avec celles trouvées par la méthodes des chemins $\hat{\sigma}_{Mch}$ et \widehat{Re}_{Mch} .

Nous remarquons d'après les résultats que lorsque la valeur de ϵ diminue, l'erreur relative diminue, donc la propriété de l'*ERAN* est vérifiée. Contrairement

à l'erreur relative donnée par *Mch* qui croît pour les deux premières valeurs de ϵ et se stabilise pour les deux dernières valeurs de ϵ donc une *ERB* est obtenue par *Mch* comme nous remarquons dans le tableau 3.4. Le temps moyen pour $N = 5 \times 10^4$ est 0.70 secondes avec *Mch* et 1.4 secondes avec *CoupeMin-Probamax*. Le temps nécessaire avec *CoupeMin-Probamax* est 2 fois plus grand que le temps avec *Mch*. Mais ce facteur est négligeable devant le facteur de réduction de variance par *CoupeMin-Probamax*.

TABLE 3.4 – Résultats numériques pour l'exemple 8, pour $N = 5 \times 10^4$, avec quatre valeur de ϵ .

ϵ	\hat{u}_N	\hat{I} 95%	$\hat{\sigma}_{EP}$	\widehat{Re}_{EP}	$\hat{\sigma}_{Mch}$	\widehat{Re}_{Mch}
10^{-1}	2.150×10^{-2}	$(2.147 \times 10^{-2}, 2.156 \times 10^{-2})$	5.18×10^{-3}	0.24	0.017	0.82
10^{-2}	2.02×10^{-4}	$(2.018 \times 10^{-4}, 2.021 \times 10^{-4})$	1.99×10^{-5}	0.098	1.979×10^{-4}	0.98
10^{-3}	2.002×10^{-6}	$(2.0014 \times 10^{-6}, 2.0025 \times 10^{-6})$	6.31×10^{-8}	0.031	1.99×10^{-6}	1.0
10^{-4}	2.0002×10^{-8}	$(2.00004 \times 10^{-8}, 2.0004 \times 10^{-8})$	2.19×10^{-10}	0.010	1.99×10^{-8}	1.0

Exemple 9 Des résultats du même type que l'exemple précédent sont fournis pour l'exemple 7 représenté par la figure 3.8, dans le tableau 3.5. L'étude théorique de la défiabilité de cet exemple nous a montré que l'erreur relative converge vers $1/3$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ ce qui correspond à la racine carré de $1/9$, cela correspond exactement à l'erreur relative trouvée par simulation. Ainsi l'erreur relative bornée est vérifiée pour cet exemple.

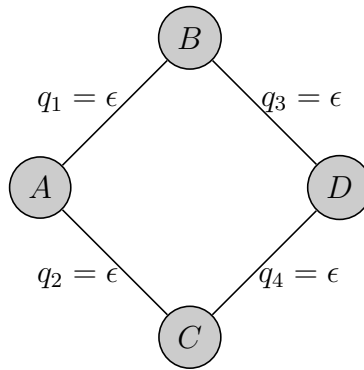


FIGURE 3.8 – Graphe avec quatre arcs, et les quatre nœuds doivent être connectés.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction générale, la préoccupation ou la problématique de la communauté scientifique travaillant sur la fiabilité des réseaux est de pouvoir estimer la défiabilité pour les grands graphes. Pour cela,

TABLE 3.5 – Résultats empiriques pour l'exemple 9, avec $N = 5 \times 10^4$ et quatre différentes valeurs de ϵ .

ϵ	\hat{u}_N	\hat{I} 95%	$\hat{\sigma}_{EP}$	\widehat{Re}_{EP}
10^{-1}	5.237×10^{-2}	$(5.223 \times 10^{-2}, 5.251 \times 10^{-2})$	1.62×10^{-2}	0.31
10^{-2}	5.927×10^{-4}	$(5.91 \times 10^{-4}, 5.944 \times 10^{-4})$	1.96×10^{-4}	0.33
10^{-3}	5.998×10^{-6}	$(5.981 \times 10^{-6}, 6.016 \times 10^{-6})$	1.996×10^{-6}	0.33
10^{-4}	6.005×10^{-8}	$(5.988 \times 10^{-8}, 6.023 \times 10^{-8})$	2.00×10^{-8}	0.33

dans les exemples suivants nous estimons la défiabilité de grands réseaux pour lesquels les méthodes analytiques sont inutiles. Comme décrit en introduction aussi, lorsque la défiabilité devient un événement rare, même la simulation standard de Monte Carlo nécessite énormément de temps pour pouvoir estimer la défiabilité avec une certaine précision.

Exemple 10 Cet exemple consiste à un grand graphe qui comporte 20 nœuds et 30 arcs, nous l'appelons dodécaèdre, il est donné par la figure 3.9. Cette structure est souvent utilisée en littérature comme référence pour l'évaluation de la fiabilité des réseaux [15, 17, 47].

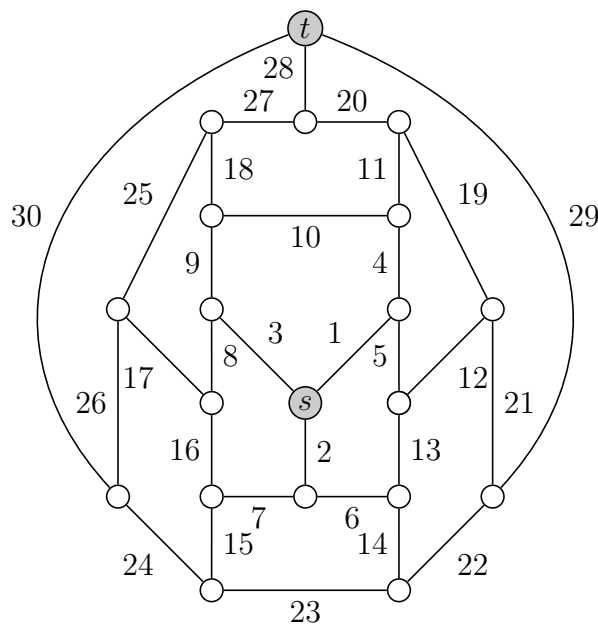


FIGURE 3.9 – Dodécaèdre

Nous considérons le cas homogène où les probabilités des arcs sont identiques

et égales à ϵ . La probabilité que les nœuds s et t ne soient pas connectés est donnée par le tableau 3.6 pour quatres différentes valeurs de ϵ .

L'erreur relative donnée pas l'échantillonnage préférentiel avec *CoupeMin-ProbMax* tends vers 0 quand $\epsilon \rightarrow 0$, ainsi la propriété de l'erreur relative asymptotiquement nulle est vérifiée, et cette propriété n'est vérifiée par aucune autre méthode. Par contre, l'erreur relative fournie par la *Mch* est bornée mais elle est plus grande que l'erreur relative donnée par *CoupeMin-ProbMax*.

TABLE 3.6 – Résultats numériques pour l'exemple 10, avec $N = 5 \times 10^4$, et quatre valeurs de ϵ .

ϵ	\hat{u}_N	\hat{I} 95%	$\hat{\sigma}_{EP}$	\widehat{Re}_{EP}	$\hat{\sigma}_{Mch}$	\widehat{Re}_{Mch}
10^{-1}	2.888×10^{-3}	$(2.828 \times 10^{-3}, 2.947 \times 10^{-3})$	6.835×10^{-3}	2.4	0.013	4.74
10^{-2}	2.063×10^{-6}	$(2.06 \times 10^{-6}, 2.066 \times 10^{-6})$	3.47×10^{-7}	0.16	1.582×10^{-5}	7.30
10^{-3}	2.0062×10^{-9}	$(2.005 \times 10^{-9}, 2.007 \times 10^{-9})$	1.025×10^{-10}	0.051	1.589×10^{-8}	7.68
10^{-4}	2.0006×10^{-12}	$(2.0003 \times 10^{-12}, 2.0009 \times 10^{-12})$	3.346×10^{-14}	0.016	1.589×10^{-11}	7.73

Exemple 11 Nous proposons dans cet exemple un graphe plus grand comme le montre la figure 3.10, d'une taille pour laquelle la simulation est en général nécessaire. Le graphe est une combinaison de trois copies du dodécaèdre de la figure 3.9, les nœuds source s de chaque dodécaèdre sont fusionnés en donnant lieu au nœud source s du graphe de la figure 3.10, idem pour le nœud destination t , ce qui donne un réseau de trois dodécaèdres en parallèle qui comporte 90 arcs. Notons que, pour cet exemple aussi les défiabilités des arcs sont identiques et égales à ϵ et le nombre de réalisations pour nos résultats est 5×10^4 . La défiabilité du système parallèle est le cube de la défiabilité d'un seul dodécaèdre. Les résultats empiriques fournis par le tableau 3.7 nous montrent que l'*ERAN* est vérifiée pour cet exemple avec notre méthode *CoupeMin-ProbMax*, car l'erreur relative diminue avec ϵ . Ainsi, notre méthode *CoupeMin-ProbMax* est meilleure que celle basée sur les chemins.

TABLE 3.7 – Résultats empiriques pour l'exemple 11, avec $N = 5 \times 10^4$, et quatre valeurs de ϵ .

ϵ	\hat{u}_N	\hat{I} 95%	$\hat{\sigma}_{EP}$	\widehat{Re}_{EP}	$\hat{\sigma}_{Mch}$	\widehat{Re}_{Mch}
10^{-1}	2.387×10^{-8}	$(2.333 \times 10^{-8}, 2.440 \times 10^{-8})$	6.09×10^{-8}	2.55	2.896×10^{-6}	121.32
5×10^{-2}	2.599×10^{-11}	$(2.552 \times 10^{-11}, 2.647 \times 10^{-11})$	5.45×10^{-11}	2.097	6.821×10^{-9}	262.44
2×10^{-2}	4.933×10^{-15}	$(4.905 \times 10^{-15}, 4.96 \times 10^{-15})$	3.09×10^{-15}	0.62	1.350×10^{-12}	273.66
5×10^{-3}	1.634×10^{-20}	$(1.631 \times 10^{-20}, 1.637 \times 10^{-20})$	3.25×10^{-21}	0.19	5.503×10^{-18}	336.78

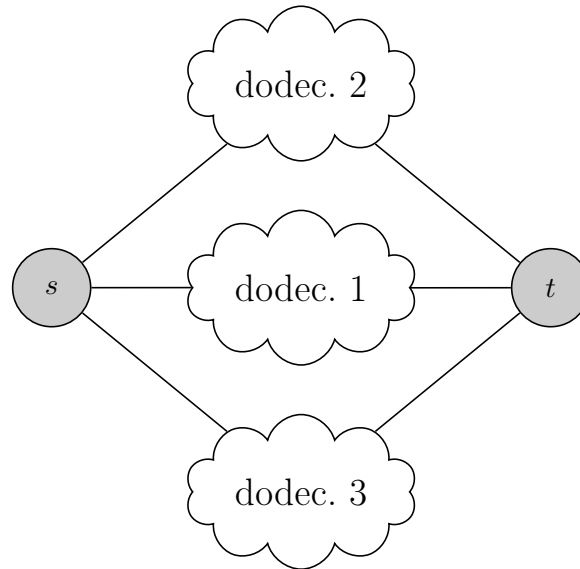


FIGURE 3.10 – Trois dodécaèdres en parallèle.

Exemple 12 Les trois dodécaèdres sont maintenant connectés en série. Le nœud source s du système en série est le nœud source du premier dodécaèdre et le nœud destination t est le nœud destination t du troisième dodécaèdre. Au milieu, le nœud destination du premier dodécaèdre est connecté à la source du deuxième dodécaèdre ainsi, de suite, comme le montre la figure 3.11. Le cas homogène est considéré pour cet exemple où la défiabilité des arcs est égale à ϵ . La fiabilité du système en série étant le cube de la fiabilité d'un seul dodécaèdre. Les résultats empiriques donnés par le tableau 3.8 montrent une erreur relative bornée avec notre méthode *CoupeMin-ProbMax* et elle est vingt fois plus petite que l'erreur relative obtenue par *Mch* quand $\epsilon \rightarrow 0$.

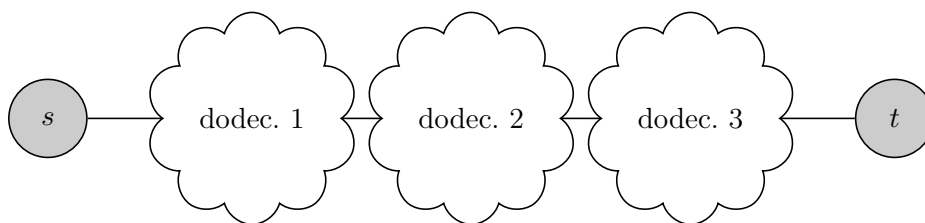


FIGURE 3.11 – Trois dodécaèdres en série.

TABLE 3.8 – Résultats empiriques pour l'exemple 12, avec $N = 5 \times 10^4$, et quatre valeurs de ϵ .

ϵ	\hat{u}_N	\hat{I} 95%	$\hat{\sigma}_{EP}$	\widehat{Re}_{EP}	$\hat{\sigma}_{Mch}$	\widehat{Re}_{Mch}
10^{-1}	8.526×10^{-3}	$(8.311 \times 10^{-3}, 8.741 \times 10^{-3})$	2.44×10^{-2}	2.8	0.062	7.27
10^{-2}	6.17×10^{-6}	$(6.098 \times 10^{-6}, 6.242 \times 10^{-6})$	8.19×10^{-6}	1.3	1.318×10^{-4}	21.36
10^{-3}	6.007×10^{-9}	$(5.94 \times 10^{-9}, 6.075 \times 10^{-9})$	7.7×10^{-9}	1.3	1.491×10^{-7}	24.82
10^{-4}	5.982×10^{-12}	$(5.915 \times 10^{-12}, 6.049 \times 10^{-12})$	7.63×10^{-12}	1.3	1.512×10^{-10}	25.27

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté notre approximation basée sur la coupe minimale à probabilité maximale, et fourni une étude des conditions pour obtenir un estimateur avec les deux propriétés *ERB* et *ERAN*. Une analyse théorique de la fiabilité de quelques réseaux nous a permis de voir la facilité d'approcher les défiabilités conditionnelles $u_{i+1}(\cdot)$ en utilisant les coupes minimales à probabilité maximale. Nous avons remarqué d'après les résultats numériques pour le dodécaèdre que l'erreur relative asymptotiquement nulle est vérifiée par notre méthode *CoupeMin-ProbaMax*, cette propriété n'est vérifiée par aucune autre méthode dans la littérature. Nous avons comparé notre méthode *CoupeMin-ProbaMax* à la méthode existante possédant une erreur relative bornée dans le cas homogène, et nous avons tout suite rendu compte que notre méthode est meilleure que celle-ci. Afin de réduire la variance et le temps de calcul, dans le chapitre suivant nous proposons une méthode d'accélération de notre méthode d'échantillonnage préférentiel basée sur *CoupeMin-ProbaMax*. La méthode d'accélération que nous proposons est basée sur les réductions série-parallèle de graphe.

Chapitre 4

Accélération de l'échantillonnage préférentiel par réduction de graphe

Dans le but d'accélérer notre plan d'échantillonnage préférentiel proposé dans le chapitre 3, nous proposons dans ce chapitre de le combiner avec des réductions série-parallèle. Les techniques de réduction de graphe sont utilisées dans la littérature principalement pour les approches exactes pour le calcul de la fiabilité des réseaux [73], [80] et [79]. Elles ont pour objectif d'augmenter les gains apportés par ces méthodes. Néanmoins, les techniques de réduction sont souvent utilisées en prétraitement d'autres algorithmes de calcul de la fiabilité des réseaux. Malheureusement, en pratique, il existe des réseaux de topologies complexes qui n'admettent aucune réduction, ce qui revient à appliquer les algorithmes de calcul de la fiabilité sur le graphe initial. Pour pallier ce problème, deux algorithmes d'incorporation des réductions série-parallèles dans notre plan d'échantillonnage préférentiel sont proposés dans ce chapitre. Les algorithmes que nous proposons consistent à chercher des réductions série-parallèle à chaque échantillonnage d'un arc, ce qui favorise l'apparition de réductions série-parallèle possibles. Les résultats expérimentaux montrent que notre méthode combinée fournit un estimateur plus efficace que celui donné par *CoupeMin-ProbaMax*.

4.1 Transformation d'un graphe stochastique

Le principe des réductions est de se ramener, en un temps polynomial, à évaluer $R_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})$ sur un graphe stochastique \mathcal{G}' de plus petite taille. La transformation induite est :

$$R_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}) = \lambda R_{\mathcal{K}'}(\mathcal{G}'),$$

ou, en exprimant la défiabilité par

$$u_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}) = 1 - (\lambda(1 - u_{\mathcal{K}'}(\mathcal{G}'))),$$

où λ est un facteur multiplicatif et \mathcal{K}' l'ensemble des nœuds terminaux du graphe \mathcal{G}' , dépendent du type de la réduction.

Définition 4.1 [26]

Deux arcs sont parallèles s'ils ont les mêmes extrémités. Un remplacement parallèle consiste à remplacer deux arcs parallèles par un seul reliant les extrémités des arcs remplacés. (voir la figure 4.2).

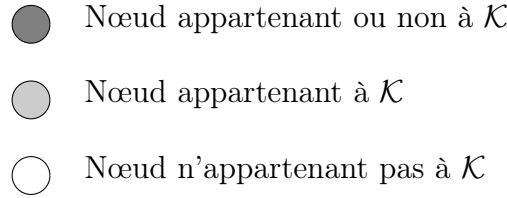


FIGURE 4.1 – Signification des nœuds.

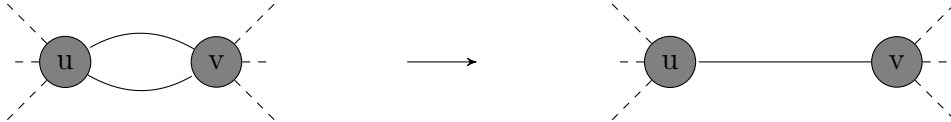


FIGURE 4.2 – Remplacement parallèle.

Définition 4.2 [26]

Deux arcs sont en série s'ils ont une seule extrémité commune et si cette extrémité est de degré 2 (possède deux arcs sortant ou entrant). Un remplacement série consiste à remplacer deux arcs en série uw et wv par un seul arc uv . (voir la figure 4.3).

Ces remplacements ne sont que des transformations de la topologie du graphe. Des réductions, dites simples, leur sont associées pour le calcul de la fiabilité du réseau.

Définition 4.3 [75]

Un graphe stochastique est série-parallèle si sa topologie peut être réduite à un arbre (un graphe connexe sans cycle) par remplacements série et parallèle successifs.

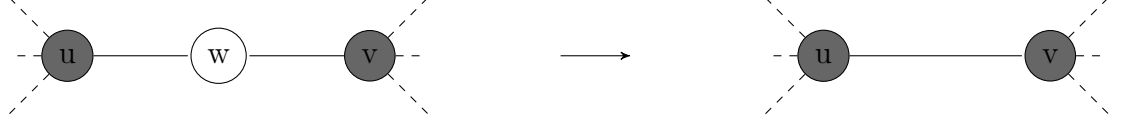


FIGURE 4.3 – Remplacement série.

4.2 Types de réductions de graphe

4.2.1 Réduction parallèle

Si deux arcs de fiabilités élémentaires respectives p_1 et p_2 donnent lieu à un remplacement parallèle, la réduction parallèle associée consiste à pondérer l'arc de remplacement par la fiabilité élémentaire $1 - q_1q_2$ avec $q_i = 1 - p_i, i = \{1, 2\}$. La fiabilité ou la défiabilité du graphe stochastique est préservée : après cette réduction, on obtient un graphe \mathcal{G}' tel que $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$ et $\lambda = 1$ [26], [67] et [108]. La fiabilité du graphe initial \mathcal{G} est la même que la fiabilité du graphe obtenu par cette réduction \mathcal{G}' , nous avons alors

$$R(\mathcal{G}) = R(\mathcal{G}').$$

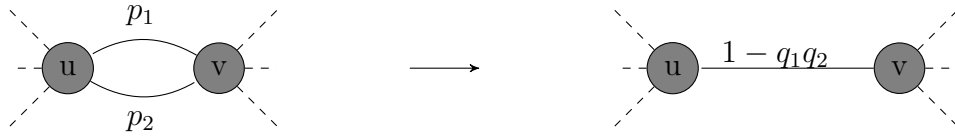


FIGURE 4.4 – Réduction parallèle.

4.2.2 Réduction série

Si deux arcs de fiabilités élémentaires respectives p_1 et p_2 donnent lieu à un remplacement série et si leur extrémités communes ne sont pas des nœuds dans \mathcal{K} , la réduction série associée consiste à pondérer l'arc de remplacement par le réel p_1p_2 , qui est la fiabilité de l'arc obtenu. Comme pour la réduction parallèle, la fiabilité ou la défiabilité du graphe stochastique initial \mathcal{G} est la même que celle du graphe réduit \mathcal{G}' .

$$R(\mathcal{G}) = R(\mathcal{G}').$$

Pour cette réduction aussi, le facteur multiplicatif $\lambda = 1$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ [26], [67] et [108].



FIGURE 4.5 – Réduction série, $w \notin \mathcal{K}$.

-Réduction de degré 2

Si les trois nœuds dans un remplacement série sont dans \mathcal{K} , une réduction de degré 2 consiste à pondérer l'arc de remplacement par la fiabilité élémentaire $p_1 p_2 / (1 - q_1 q_2)$, où p_1 et p_2 sont les fiabilités respectives des arcs à remplacer. La fiabilité du réseau \mathcal{G} est obtenue par

$$R(\mathcal{G}) = \lambda R_{\mathcal{K}'}(\mathcal{G}'),$$

où \mathcal{G}' est le graphe obtenu après remplacement, $\lambda = 1 - q_1 q_2$ et w est le nœud commun des arcs en série, $\mathcal{K}' = \mathcal{K} - \{w\}$. $R_{\mathcal{K}-\{w\}}(\mathcal{G}')$ est la fiabilité du graphe après remplacement avec la suppression du nœud terminal w , l'ensemble de terminaux de \mathcal{G}' est $\mathcal{K}' = \mathcal{K} - \{w\}$.



FIGURE 4.6 – Réduction de degré 2, $u, v, w \in \mathcal{K}$.

Ces réductions sont couramment utilisées. A titre d'exemple, nous citons pour les réductions série et parallèle [69] et pour la réduction de degré 2 [99].

4.2.3 Réduction de degré 1

Une réduction particulière existe aussi, elle est la réduction des arcs suspendus ou encastrés. C'est-à-dire : l'une des deux extrémités de l'arc de degré 1 est reliée au graphe l'autre n'est connectée à aucun autre arc.

Si un nœud v qui n'est pas dans \mathcal{K} possède un seul nœud voisin w , le nœud v et l'arc qui le relie à w peuvent être supprimés. La fiabilité (ou la défiabilité) du graphe \mathcal{G}' obtenu par cette réduction est la même que la fiabilité (ou la défiabilité) du graphe initial \mathcal{G} . On a donc

$$R(\mathcal{G}) = R(\mathcal{G}').$$

Si le nœud v est dans \mathcal{K} , l'arc vw sera comprimé et le nœud w est remplacé par le nœud v . Dans ce cas, le coefficient $\lambda = p_{vw}$ et la fiabilité du graphe est obtenue par

$$R(\mathcal{G}) = \lambda R(\mathcal{G}'),$$

la défiabilité est alors obtenue par

$$u(\mathcal{G}) = 1 - \lambda(1 - u(\mathcal{G}')),$$

Définition 4.4 [75]

Un graphe stochastique est dit sp -réductible, s'il est série-parallèle et réductible à un arbre par réductions série-parallèle successives.

Un graphe stochastique est sp -complexe, s'il est série-parallèle et s'il n'est pas sp -réductible.

Remarque 4.1 *Un graphe stochastique série-parallèle n'est pas sp -réductible pour tout choix de \mathcal{K} . Cette remarque est illustrée par la figure 4.7 et la figure 4.8. Dans celles-ci, la topologie considérée est série-parallèle. Cependant, selon le choix de \mathcal{K} , le graphe stochastique est ou non sp -réductible.*

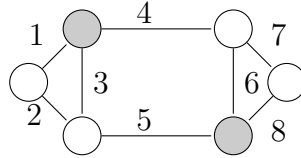


FIGURE 4.7 – Graphe sp -réductible.

Les nœuds appartenant à \mathcal{K} pour le graphe série-parallèle donné par la figure 4.7, permettent de réduire le graphe en appliquant les réductions série-parallèle. Une réduction série est possible des deux arcs 1 et 2 (respectivement 7 et 8). Une réduction parallèle de l'arc 3 (respectivement 6) avec l'arc obtenu par la réduction série des deux arcs 1-2 (respectivement (7-8)), l'arc obtenu par cette réduction est en série avec l'arc 5 (respectivement 4), une réduction série est alors

possible. Au final on obtient deux arcs en parallèle qui peuvent être réduit en un seul arc.

La modification du choix des nœuds de \mathcal{K} pour le même graphe série-parallèle donné par la figure 4.7 n'induit toujours pas la possibilité d'appliquer des réductions série-parallèle, comme on le voit dans la figure 4.8, pas d'arcs en série ou en parallèle qui permettent un remplacement série ou parallèle.

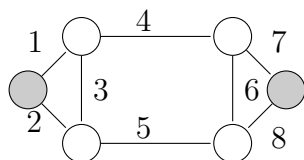


FIGURE 4.8 – Graphe sp-complexe.

Dans le cas particulier des graphes stochastiques sp-réductibles, la fiabilité du réseau peut être calculée par réductions série-parallèle à l'aide d'un algorithme de complexité polynomiale en fonction de la taille du graphe. Ceci a été utilisé depuis fort longtemps [69], [70]. Vu la complexité des algorithmes d'évaluation de la \mathcal{K} -fiabilité d'un graphe stochastique, le gain apporté par ces réductions est toujours appréciable. Ces réductions peuvent toujours être utilisées en prétraitement de tout algorithme calculant la fiabilité des réseaux [57]. Elles permettent de travailler sur un modèle réduit.

Exemple 13 Nous allons illustrer par la figure 4.9 et par la figure 4.10, l'effet des réductions série-parallèle sur la topologie Arpanet.

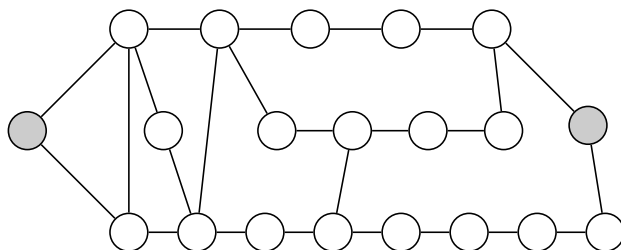


FIGURE 4.9 – État du réseau "Arpanet" avant réductions.

Les techniques de réduction sont utilisées en prétraitement en général dans la littérature, un facteur de préservation de fiabilité de réseau est alors calculé selon le type de réductions appliquées. Le facteur est alors multiplié par la fiabilité

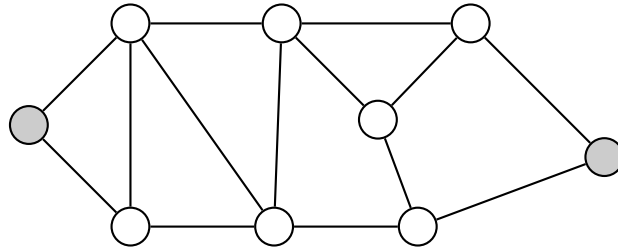


FIGURE 4.10 – État du réseau "Arpanet" suite aux réductions série-parallèle.

du réseau restant des réductions \mathcal{G}' . La fiabilité de \mathcal{G}' est obtenue par d'autres techniques de calcul de fiabilité soit exactes ou basées sur la simulation. Les réductions série-parallèle viennent réduire la taille d'un graphe et facilitent ainsi le calcul de la fiabilité. Mais ce type de réductions réalisé en prétraitement n'est pas avantageux pour les graphes sp-complexes, dont aucune réduction série ou parallèle n'est possible. Nous proposons dans les sections qui suivent deux algorithmes basés sur notre méthode d'échantillonnage préférentiel (proposée dans le chapitre 3). Nous introduisons les réductions série-parallèle dans le processus d'échantillonnage des arcs, dans le but de réduire le temps de calcul et la variance par rapport à ceux fournies par l'approximation de l'estimateur à variance nulle basée sur la *CoupeMin-ProbaMax*.

4.3 Combinaison échantillonnage préférentiel- réductions de graphe

Nous considérons deux types de combinaison de l'échantillonnage préférentiel et les réductions de graphe. Les réductions de graphe que nous utilisons sont des réductions série-parallèle, décrites dans les premières sections de ce chapitre. À chaque étape i de la chaîne de Markov, l'état de chaque arc est généré par l'algorithme d'échantillonnage préférentiel basé sur la *CoupeMin-ProbaMax*.

La topologie du graphe est modifiée et simplifiée selon les états des arcs e_i . La première façon d'introduire les réductions série-parallèle dans notre méthode d'échantillonnage préférentiel consiste à réduire le graphe après avoir échantillonné l'arc i selon la nouvelle probabilité \tilde{q}_i . La seconde manière consiste à chercher des réductions possibles avant d'échantillonner l'arc i selon la mesure \tilde{q}_i d'échantillonnage préférentiel, cela se fait à chaque calcul de coupes minimales à probabilité maximale. Nous appelons la première technique « réduction série-parallèle postérieure » (*RSPP*), car les réductions viennent après le calcul de la mesure d'échantillonnage préférentiel. Nous appelons la seconde technique par « réduction série-parallèle anticipée » (*RSPA*) car les réductions anticipent le cal-

cul de la mesure d'échantillonnage préférentiel. Pour les deux techniques, avant d'entamer le processus d'échantillonnage des arcs, nous vérifions si le graphe initial est sp-réductible, à ce moment là nous appliquons les réductions série-parallèle possibles.

4.3.1 Réduction de graphe après l'échantillonnage préférentiel

Dans ce cas, les réductions série-parallèle s'appliquent une seule fois à chaque étape i selon l'état de l'arc i échantillonné. Soit m le nombre d'arcs du graphe initial. La défiabilité d'échantillonnage préférentiel de l'arc i est calculée avec les probabilités conditionnelles $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i, 1)$ et $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i, 0)$, utilisant (2.6). L'état de l'arc i est généré par la mesure d'échantillonnage préférentiel \tilde{q}_i .

- Si $X_i = 0$ l'arc i ne fonctionne pas et sera supprimé, le ratio de probabilités est $L_i(X_i = 0) = q_i/\tilde{q}_i$, les réductions série-parallèle sont alors appliquées au graphe $(\mathcal{G}_i, 0)$ et nous obtenons le graphe conditionnel réduit $(\mathcal{G}_i^r, 0)$.

- Si non $X_i = 1$ l'arc fonctionne et sera comprimé, le ratio de probabilités est $L_i(X_i = 1) = (1 - q_i)/(1 - \tilde{q}_i)$, les réductions série-parallèle sont alors appliquées au graphe $(\mathcal{G}_i, 1)$ et nous obtenons le graphe conditionnel réduit $(\mathcal{G}_i^r, 1)$. Le même processus qui s'applique à chaque étape i jusqu'à épuisement du nombre de tous les arcs à échantillonner.

Le graphe initial \mathcal{G} est modifié et simplifié suite à l'échantillonnage des arcs et à la contraction ou suppression puis aux réductions appliquées, le graphe obtenu à chaque étape i , est

- $(\mathcal{G}_i^r, 0)$ si l'arc i ne fonctionne pas, ou
- $(\mathcal{G}_i^r, 1)$ si l'arc i fonctionne.

Avec cette simplification de graphe, le nombre d'arcs restant à échantillonner à l'étape $i + 1$ est le nombre d'arcs de l'un de ces deux graphes, selon l'état de X_i soit :

- $m = m_{(\mathcal{G}_i^r, 1)}$ pour $X_i = 1$ ou
- $m = m_{(\mathcal{G}_i^r, 0)}$ pour $X_i = 0$.

La défiabilité des arcs à chaque étape i est donnée par :

$$\hat{q}_i^{(1)} = \frac{q_i \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 0)}{q_i \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 0) + (1 - q_i) \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 1)}, \quad (4.1)$$

avec $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 0)$ et $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 1)$ l'approximation de la coupe minimale à probabilité maximale pour les graphes $(\mathcal{G}_i^r, 0)$ et $(\mathcal{G}_i^r, 1)$ respectivement. q_i est la défaillance originale de chaque arc i .

Les procédures du processus d'échantillonnage préférentiel avec les réductions série-parallèle appliquées postérieurement à notre mesure d'échantillonnage préférentiel sont résumées par l'algorithme 3 et par une analyse détaillée sur l'exemple

de la figure (4.26).

Exemple 14 Dans cet exemple, nous étudions l'application de notre algorithme *RSPP* pour le graphe de la figure 4.26, en vue de calculer la probabilité que les deux nœuds s et t ne soient pas connectés. Nous supposons le cas homogène où toutes les probabilités des arcs sont identiques, nous avons $q_i = \epsilon$ pour $i = 1, \dots, 5$. Nous allons calculer la probabilité d'échantillonnage préférentiel à chaque étape et le ratio de probabilités correspondant avec les deux algorithmes.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la probabilité de la déconnexion des deux nœuds s et t est $u(\mathcal{G}) = 2\epsilon^2 + 2\epsilon^3 - 5\epsilon^4 + 2\epsilon^5$.

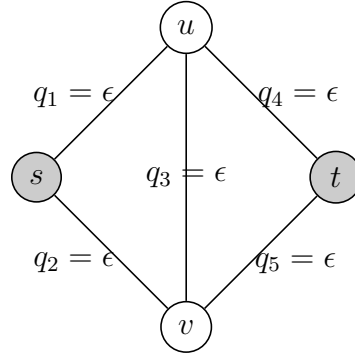


FIGURE 4.11 – Graphe avec cinq arcs.

Nous entamons l'analyse de l'exemple par l'algorithme *RSPP*.

- A l'étape 1 de l'algorithme *RSPP*, les approximations des coupes minimales à probabilité maximale des deux graphes $(\mathcal{G}_1, 0)$ et $(\mathcal{G}_1, 1)$, résultant de la compression et la suppression du premier arc sont respectivement, $\hat{u}_2(\mathcal{G}_1, 0) = \epsilon$ et $\hat{u}_2(\mathcal{G}_1, 1) = \epsilon^2$. La probabilité d'échantillonnage préférentiel est donc $\tilde{q}_1^{(1)} = \epsilon^2 / (\epsilon^2 + (1 - \epsilon)\epsilon^2) = 1/(2 - \epsilon)$ pour $X_1 = 0$, et $\tilde{q}_1^{(1)} = 1 - \epsilon/(2 - \epsilon)$ pour $X_1 = 1$.

Les réductions série-parallèle seront appliquées selon l'état de l'arc X_1 .

- Si $X_1 = 1$, le premier arc fonctionne donc comprimé, les nœuds s et u deviennent un seul nœud et l'arc 2 et l'arc 3 sont réduit à un seul arc avec une probabilité de défiabilité $q_{(2-3)} = \epsilon^2$. Les réductions série-parallèle seront appliquées au graphe $G_1(1)$ représenté par la figure 4.12. l'arc (2-3) et l'arc 5 sont en série, la réduction série appliquée à ces deux arcs nous donne un seul arc avec une défiabilité $q_{(2-3-5)} = 1 - (1 - \epsilon)(1 - \epsilon^2) = \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3$. Nous obtenons ainsi le graphe de la figure 4.13.

D'après le graphe de la figure 4.13, l'arc (2-3-5) et l'arc 4, peuvent être réduits en un seul arc par une réduction parallèle. La probabilité de l'arc obtenu par la réduction parallèle est : $q_{(2-3-5-4)} = \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4$. L'ensemble

Algorithme 3 Algorithme de combinaison réduction série-parallèle postérieure-échantillonnage préférentiel.

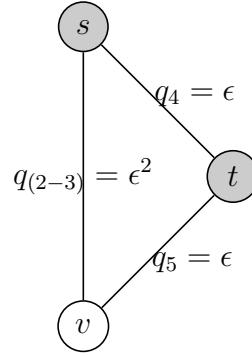
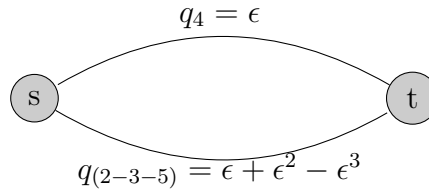
```

 $Nbr \rightarrow 0;$ 
 $L \leftarrow 1;$ 
pour  $i = 1$  à  $m$  faire
    supprimer l'arc  $i$  du graphe initial  $\mathcal{G}$ 
    si  $i=1$  alors
        trouver la coupe minimale  $\delta_i^-$  à probabilité maximale qui correspond à  $(\mathcal{G}_i, 0);$ 
        calculer  $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i, 0) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^-)]$ 
    sinon
        trouver la coupe minimale  $\delta_i^-$  à probabilité maximale qui correspond à  $(\mathcal{G}_i^r, 0);$ 
        calculer  $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 0) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^-)]$ 
    fin

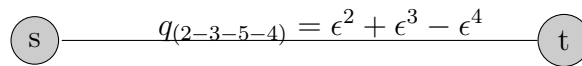
    compresser l'arc  $i$  du graphe initial  $\mathcal{G}$ 
    si  $i=1$  alors
        trouver la coupe minimale  $\delta_i^+$  à probabilité maximale qui correspond à  $(\mathcal{G}_i, 1);$ 
        calculer  $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i, 1) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^+)]$ 
    sinon
        trouver la coupe minimale  $\delta_i^+$  à probabilité maximale qui correspond à  $(\mathcal{G}_i^r, 1);$ 
        calculer  $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, 1) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^+)]$ 
    fin

    calculer  $\tilde{q}_i^{(1)}$  avec (4.1);
    générer  $U_i$  une variable aléatoire uniforme sur  $(0, 1);$ 
    si  $U_i < \tilde{q}_i$  alors
         $x_i \leftarrow 0;$        $L_i \leftarrow q_i / \tilde{q}_i;$ 
        si  $i=1$  alors
            Appliquer les réductions sp possibles pour  $(\mathcal{G}_i, 0);$ 
        sinon
            Appliquer les réductions sp possibles pour  $(\mathcal{G}_i^r, 0);$ 
        fin
         $m \leftarrow m_{(\mathcal{G}_i^r, 0)};$        $\mathcal{G} \leftarrow (\mathcal{G}_i^r, 0);$ 
         $Nbr \rightarrow Nbr + (|(\mathcal{G}_i, 0)| - |(\mathcal{G}_i^r, 0)|);$ 
    sinon
         $x_i \leftarrow 1;$        $L_i \leftarrow (1 - q_i) / (1 - \tilde{q}_i);$ 
        si  $i=1$  alors
            Appliquer les réductions sp possibles  $(\mathcal{G}_i, 1);$ 
        sinon
            Appliquer les réductions sp possibles pour  $(\mathcal{G}_i^r, 1);$ 
        fin
         $m \leftarrow m_{(\mathcal{G}_i^r, 1)};$        $\mathcal{G} \leftarrow (\mathcal{G}_i^r, 1);$ 
         $Nbr \rightarrow Nbr + (|(\mathcal{G}_i, 1)| - |(\mathcal{G}_i^r, 1)|);$ 
    fin
     $L \leftarrow L \times L_i;$ 
fin pour
Retour  $Z = \psi(x_1, \dots, x_m) \times L;$ 

```


 FIGURE 4.12 – Graphe $G_1(1)$.

 FIGURE 4.13 – Réduction série du graphe $G_1(1)$.

de ces réductions est représenté par la figure 4.14, nous l'appellerons par $G_1^r(1)$.


 FIGURE 4.14 – Graphe $G_1^r(1)$.

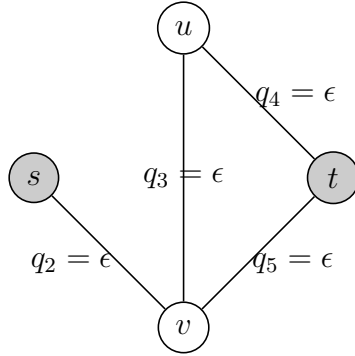
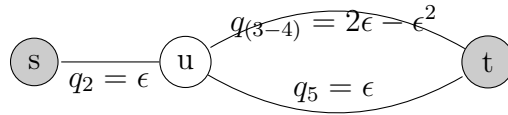
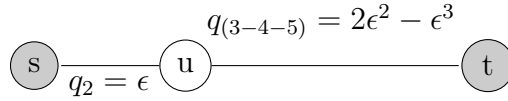
Le ratio de probabilités pour $X_1 = 1$ est :

$$L_1(X_1 = 1) = \frac{1 - q_1}{1 - \tilde{q}_1^{(1)}} = \frac{1 - \epsilon}{1 - \frac{1}{2-\epsilon}} = 2 - \epsilon.$$

Nous avons effectué pour $X_1 = 1$ deux réductions, une série et une parallèle.

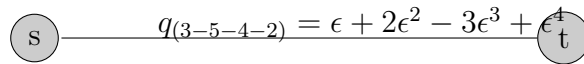
- Si $X_1 = 0$ les reductions sont appliquées sur le graphe $G_1(0)$ représenté par la figure 4.15. L'arc 3 et l'arc 4 sont en série, la réduction de ces deux arcs nous donne le graphe de la figure 4.16, avec la défiabilité de l'arc (3-4), $q_{(3-4)} = 1 - (1 - \epsilon)^2 = 2\epsilon - \epsilon^2$.

D'après la figure 4.16, le graphe possède deux arcs en parallèle, l'arc (3-4) et l'arc 5 sont réduits, et nous obtenons un arc avec une défiabilité

FIGURE 4.15 – Graphe $G_1(0)$.FIGURE 4.16 – Réduction série du graphe $G_1(0)$.FIGURE 4.17 – Réduction parallèle du graphe $G_1(0)$.

$q_{(3-4-5)} = \epsilon(2\epsilon - \epsilon^2) = 2\epsilon^2 - \epsilon^3$, le graphe obtenu par cette réduction est celui de la figure 4.17.

Une réduction série est possible des arcs 2 et (3-4-5) du graphe de la figure 4.17. Le graphe est alors réduit en un seul arc d'une défiabilité $q_{3-4-5-2} = 1 - (1 - \epsilon)(1 - 2\epsilon^2 + \epsilon^3) = \epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4$.

FIGURE 4.18 – Graphe $G_1^r(0)$.

Le ratio de probabilité pour $X_1 = 0$ est :

$$L_1(X_1 = 0) = \frac{q_1}{\tilde{q}_1^{(1)}} = \frac{\epsilon}{1 - \frac{1}{2-\epsilon}} = \epsilon(2 - \epsilon).$$

Le nombre de réductions pour $X_1 = 0$ est trois : deux séries et une parallèle.

- A l'étape 2 de l'algorithme *RSPP*, nous devons échantillonner les arcs du graphe $G_1^r(X_i)$ obtenu par l'échantillonnage du premier arc du graphe \mathcal{G} et les réductions série-parallèle possibles. Dans les deux cas $X_1 = 1$ et $X_1 = 0$, nous avons un graphe composé d'un seul arc à lequel nous attribuons la variable aléatoire indépendante X_2 . Nous aurons dans ce cas quatre configurations possibles. Deux configurations qui ne nous intéressent pas ($X_1 = 1, X_2 = 1$) et ($X_1 = 0, X_2 = 1$) car nous avons les deux nœuds s et t connectés. Les deux autres configurations ($X_1 = 1, X_2 = 0$) et ($X_1 = 0, X_2 = 0$) pour lesquelles $\psi(X) = 1$ et donc s et t non connectés.
- Si ($X_1 = 1, X_2 = 0$), les approximations des coupes minimales à probabilité maximale des deux graphes $(\mathcal{G}_1^r, 0)$ et $(\mathcal{G}_1^r, 1)$ résultants de la compression et la suppression de l'arc X_2 sont respectivement, $\hat{u}_3(\mathcal{G}_1^r, 0) = 1$ et $\hat{u}_3(\mathcal{G}_1^r, 1) = 0$. La probabilité d'échantillonnage préférentiel est donc $\tilde{q}_2^{(1)} = 1$.

Le ratio de probabilités dans ce cas est :

$$L_2(X_2 = 0) = \frac{q_2}{\tilde{q}_2^{(1)}} = \frac{q_{(2-3-5-4)}}{\tilde{q}_{(2-3-5-4)}^{(1)}} = \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4.$$

- Identiquement, si ($X_1 = 0, X_2 = 0$), les approximations des coupes minimales à probabilité maximale des deux graphes $(\mathcal{G}_1^r, 0)$ et $(\mathcal{G}_1^r, 1)$, résultants de la compression et la suppression de l'arc X_2 sont respectivement, $\hat{u}_3(\mathcal{G}_1^r, 0) = 1$ et $\hat{u}_3(\mathcal{G}_1^r, 1) = 0$. La probabilité d'échantillonnage préférentiel est donc $\tilde{q}_2^{(1)} = 1$.

Le ratio de probabilités dans ce cas est :

$$L_2(X_2 = 0) = \frac{q_2}{\tilde{q}_2^{(1)}} = \frac{q_{(3-5-4-2)}}{\tilde{q}_{(3-5-4-2)}^{(1)}} = \epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4.$$

Pour les deux configurations possibles ($X_1 = 1, X_2 = 0$) et ($X_1 = 0, X_2 = 0$), nous avons les deux estimateurs

$$\begin{aligned} L(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \frac{1 - q_1}{1 - \tilde{q}_1^{(1)}} \times \frac{q_2}{\tilde{q}_2^{(1)}} \\ &= \frac{1 - q_1}{1 - \tilde{q}_1^{(1)}} \times \frac{q_{(2-3-5-4)}}{\tilde{q}_{(2-3-5-4)}^{(1)}} \\ &= \left(\frac{1 - \epsilon}{1 - \frac{1}{2-\epsilon}} \right) (\epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4) \\ &= (2 - \epsilon)(\epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \frac{q_1}{\tilde{q}_1^{(1)}} \times \frac{q_2}{\tilde{q}_2^{(1)}} \\
&= \frac{\epsilon}{\frac{1}{2-\epsilon}} \times \frac{q(3-5-4-2)}{\tilde{q}_{(3-5-4-2)}^{(1)}} \\
&= \frac{\epsilon}{\frac{1}{2-\epsilon}} (\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4) \\
&= \epsilon(2 - \epsilon)(\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4).
\end{aligned}$$

Si nous notons $\mathbb{E}[(Z_{RSP})^2]$, le moment d'ordre deux de l'estimateur, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Z_{RSP})^2] &= (\epsilon(2 - \epsilon)(\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4))^2 \frac{1}{2 - \epsilon} \\
&\quad + ((2 - \epsilon)(\epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4))^2 \frac{1 - \epsilon}{2 - \epsilon} = 4\epsilon^4 + o(\epsilon^4)
\end{aligned}$$

L'erreur relative nous donne :

$$\frac{\mathbb{E}[(Z_{RSP})^2] - (u(\mathcal{G}))^2}{(u(\mathcal{G}))^2} \rightarrow 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Nous constatons que l'*ERAN* est satisfaite (quand ϵ tend vers 0).

4.3.2 Réduction de graphe avant l'échantillonnage préférentiel

L'objectif de cette technique est de réduire le temps nécessaire à la recherche des coupes minimales à probabilité maximale qui nécessitent un temps polynomiale. Les réductions série-parallèle du graphe sont appliquées avant de procéder à la recherche des coupes minimales à probabilité maximale (car, le temps de la recherche des coupes minimales d'un graphe qui possède 100 arcs est inférieur au temps de recherche des coupes minimales d'un graphe qui possède 50 arcs). Les deux approximations des coupes minimales à probabilité maximale $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i(X_i = k))$ sont nécessaires pour le calcul des nouvelles défiabilités des arcs \tilde{q}_i , ($k \in \{1, 0\}$), et \mathcal{G}_i le graphe restant à chaque compression ou suppression de l'arc i). En conséquence, nous allons réduire les deux cas de graphe partiel obtenu après compression ou suppression de l'arc i ($\mathcal{G}_i(X_i = 1)$) et ($\mathcal{G}_i(X_i = 0)$) respectivement.

L'arc i du graphe initial \mathcal{G} est comprimé, nous obtenons ainsi le graphe $\mathcal{G}_1(x_1 = 1)$ que nous notons ($\mathcal{G}_{1,1}$). Le même arc est supprimé du \mathcal{G} , nous obtenons le graphe

$\mathcal{G}_1(x_1 = 0)$ que nous notons $(\mathcal{G}_{1,0})$. Avant de calculer les probabilités conditionnelles $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{1,1})$ et $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{1,0})$, nous appliquons les réductions série-parallèle possibles pour les graphes $(\mathcal{G}_{1,1})$ et $(\mathcal{G}_{1,0})$. Suite aux réductions série-parallèle, nous obtenons deux copies de graphes $(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ et $(\mathcal{G}_{i,0}^r)$, pour lesquels nous calculons les approximations des coupes minimales à probabilité maximale $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ et $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,0}^r)$ respectivement. La défiabilité de l'arc i est ainsi calculée avec les défiabilités $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ et $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,0}^r)$. L'état de chaque arc i est généré par la mesure d'échantillonnage préférentiel \tilde{q}_i . Si $X_i = 0$ l'arc ne fonctionne pas et sera supprimé, le ratio de probabilités est $L_i(X_i = 0) = q_i/\tilde{q}_i$. Si $X_i = 1$, l'arc fonctionne et sera comprimé, le ratio de probabilités est $L_i(X_i = 1) = (1 - q_i)/(1 - \tilde{q}_i)$.

Le graphe initial \mathcal{G} est modifié et simplifié suit à l'échantillonnage des arcs et aux réductions appliquées, le graphe obtenu est $(\mathcal{G}_{i,0}^r)$ si l'arc i ne fonctionne pas ou $(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ si l'arc i fonctionne. Avec cette simplification de graphe, le nombre d'arcs restant à échantillonner à chaque étape $i + 1$ égal au nombre d'arcs de l'un de ces deux graphes, selon l'état de X_i soit $m = m(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ pour $X_i = 1$ ou $m = m(\mathcal{G}_{i,0}^r)$ pour $X_i = 0$. Nous appliquons le même processus à chaque étape i jusqu'à épuisement du nombre de tous les arcs à échantillonner.

La défiabilité des arcs à chaque étape i est donnée par :

$$\hat{q}_i^{(2)} = \frac{q_i \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,0}^r)}{q_i \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,0}^r) + (1 - q_i) \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,1}^r)}, \quad (4.2)$$

avec $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,0}^r)$ et $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ l'approximation de la coupe minimale à probabilité maximale pour les graphes $(\mathcal{G}_{i,0}^r)$ et $(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ respectivement.

Les procédures du processus d'échantillonnage préférentiel avec les réductions série-parallèle appliquées antérieurement à notre mesure d'échantillonnage préférentiel sont résumées par l'algorithme 4 et par une étude théorique sur l'exemple de la figure (4.26).

Nous appliquons notre algorithme *RSPA* pour le graphe de la figure 4.26.

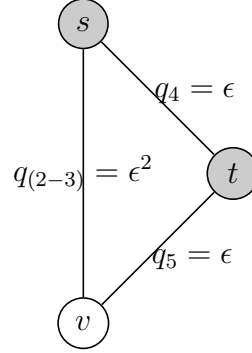
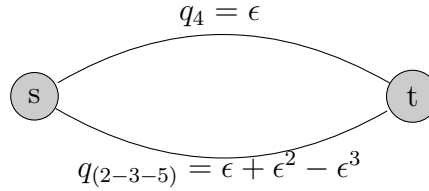
- Dans le cas de *RSPA* les réductions sont appliquées avant l'échantillonnage préférentiel, pour cela nous cherchons les réductions série-parallèle possibles dans les deux graphes $\mathcal{G}_{1,1}$ et $\mathcal{G}_{1,0}$, résultants de la compression et de la suppression du premier arc du graphe initial \mathcal{G} . $\mathcal{G}_{1,1}$ et $\mathcal{G}_{1,0}$, représentés respectivement par les deux figures 4.19 et 4.22. Les approximations des coupes minimales à probabilité maximale sont calculées après avoir réduit les deux graphes $\mathcal{G}_{1,1}$ et $\mathcal{G}_{1,0}$.
- Quand $X_1 = 1$, nous avons le graphe de la figure 4.19, l'arc (2-3) et l'arc 5 de ce graphe sont en série, la réduction série appliquée à ces deux arcs nous donne un seul arc avec une défiabilité $q_{(2-3-5)} = 1 - (1 - \epsilon)(1 - \epsilon^2) = \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3$, ainsi nous obtenons le graphe de la figure 4.20. D'après le graphe de la figure 4.20, l'arc (2-3-5) et l'arc 4 peuvent être réduits en un seul arc par une réduction parallèle. La probabilité de l'arc

Algorithme 4 Algorithme de combinaison réduction série-parallèle anticipée-échantillonnage préférentiel

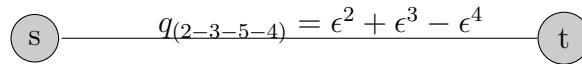
```

 $L \leftarrow 1;$ 
pour  $i = 1$  to  $m$  faire
  supprimer l'arc  $i$  du graphe initial  $\mathcal{G}$ 
  appliquer les réductions sp possibles pour  $(\mathcal{G}_{i,0})$ .
  trouver la coupe minimale  $\delta_i^-$  à probabilité maximale de  $(\mathcal{G}_{i,0}^r)$ ;
  Calculer  $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,0}^r) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^-)]$ ;
  comprimer l'arc  $i$  du graphe initial  $\mathcal{G}$ 
  appliquer les réductions sp possibles pour  $(\mathcal{G}_{i,1})$ .
  trouver la coupe minimale  $\delta_i^+$  à probabilité maximale de  $(\mathcal{G}_{i,1}^r)$ ;
  Calculer  $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,1}^r) \leftarrow \mathbb{P}[E(\delta_i^+)]$ ;
  calculer  $\tilde{q}_i^{(2)}$  avec (4.2);
  générer  $U_i$  une variable aléatoire uniforme sur  $(0, 1)$ ;
  si  $U_i < \tilde{q}_i$  alors
     $x_i \leftarrow 0;$        $L_i \leftarrow q_i / \tilde{q}_i;$ 
     $m \leftarrow m_{(\mathcal{G}_{i,0}^r)};$        $\mathcal{G} \leftarrow (\mathcal{G}_{i,0}^r);$ 
  sinon
     $x_i \leftarrow 1;$        $L_i \leftarrow (1 - q_i) / (1 - \tilde{q}_i);$ 
     $m \leftarrow m_{(\mathcal{G}_{i,1}^r)};$        $\mathcal{G} \leftarrow (\mathcal{G}_{i,1}^r);$ 
  finsi
   $L \leftarrow L \times L_i;$ 
fin pour
Retour  $Z = \psi(x_1, \dots, x_m) \times L;$ 

```


 FIGURE 4.19 – Graphe $G_{1,1}$.

 FIGURE 4.20 – Réduction série du graphe $G_1(1)$.

obtenu par la réduction parallèle est : $q_{(2-3-5-4)} = \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4$. Le graphe obtenu par l'ensemble de ces réductions est représenté par la figure 4.21, nous l'appellerons par $G_{1,1}^r$.

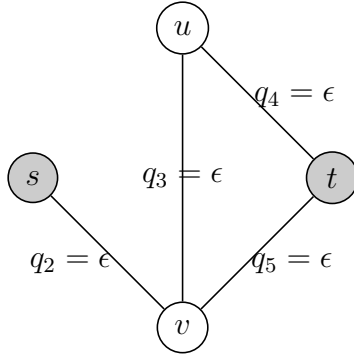
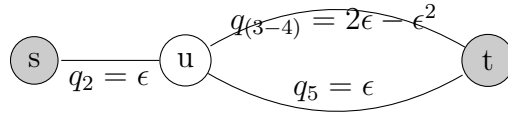
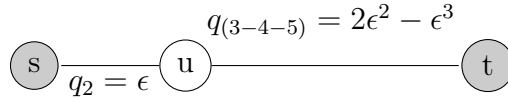
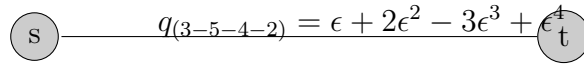

 FIGURE 4.21 – Graphe $G_{1,1}^r$.

- Quand $X_1 = 0$, nous avons le graphe de la figure 4.22, l'arc 3 et l'arc 4 de ce graphe sont en série, la réduction de ces deux arcs nous donne le graphe de la figure 4.23, avec la défiabilité de l'arc (3-4), $q_{(3-4)} = 1 - (1 - \epsilon)^2 = 2\epsilon - \epsilon^2$.

D'après la figure 4.23, le graphe possède deux arcs en parallèle, l'arc (3-4) et l'arc 5 sont réduits, et nous obtenons un arc avec une défiabilité $q_{(3-4-5)} = \epsilon(2\epsilon - \epsilon^2) = 2\epsilon^2 - \epsilon^3$, représenté par le graphe de la figure 4.24.

Une réduction série est possible des deux arcs 2 et (3-4-5) du graphe de la figure 4.24. Le graphe est alors réduit en un seul arc d'une défiabilité $q_{3-4-5-2} = 1 - (1 - \epsilon)(1 - 2\epsilon^2 + \epsilon^3) = \epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4$, figure 4.25.

Nous avons appliqué les réductions série-parallèle pour les deux graphe $G_{1,1}^r$ et $G_{1,0}^r$. Les approximations des coupes minimales à probabilité maximales

FIGURE 4.22 – Graphe $G_{1,0}$.FIGURE 4.23 – Réduction série du graphe $G_{1,0}$.FIGURE 4.24 – Réduction parallèle du graphe $G_{1,0}$.FIGURE 4.25 – Graphe $G_{1,0}^r$.

pour les deux graphes $G_{1,1}^r$ et $G_{1,0}^r$ sont comme suit :

$$\hat{u}_2(\mathcal{G}_{1,0}^r) = \epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4 \text{ et } \hat{u}_2(\mathcal{G}_{1,1}^r) = \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4.$$

La défiabilité d'échantillonnage préférentiel du premier arc du graphe \mathcal{G} est :

$$\tilde{q}_1^{(2)} = \frac{\epsilon(\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4)}{\epsilon(\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4) + (1 - \epsilon)(\epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4)}.$$

Maintenant on génère l'état du premier arc selon la nouvelle probabilité $\tilde{q}_1^{(2)}$.

– Si $X_1 = 1$, Le ratio de probabilités est :

$$L_1(X_1 = 1) = \frac{1 - q_1}{1 - \tilde{q}_1^{(2)}} = \frac{1 - \epsilon}{1 - \frac{\epsilon(\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4)}{\epsilon(\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4) + (1 - \epsilon)(\epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4)}}.$$

– Si $X_1 = 0$, le ratio de probabilités est :

$$L_1(X_1 = 0) = \frac{q_1}{\tilde{q}_1^{(2)}} = \frac{\epsilon}{\frac{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)}{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)+(1-\epsilon)(\epsilon^2+\epsilon^3-\epsilon^4)}}.$$

- Dans la seconde étape de l'algorithme *RSPA* nous devons réduire et échantillonner les arcs du graphe $G_{1,k}^r$ que nous avons obtenu dans la première étape de l'algorithme. Nous attribuons la variable aléatoire X_2 à l'arc du graphe $G_{1,k}^r$, car ce dernier possède un seul arc et donc pas de réduction possible dans cette étape. Selon l'état de l'arc précédemment échantillonné X_1 nous avons deux cas de configurations de graphe qui nous intéressent pour lesquelles $\psi(X) = 1$.
 - Si $X_1 = 1$ et si $X_2 = 0$ nous avons $\psi(X) = 1$
 - quand $X_2 = 0$ l'approximation de coupe minimale à probabilité maximale du graphe $\mathcal{G}_{1,0}^r$ est $\hat{u}_3(\mathcal{G}_{1,0}^r) = 1$,
 - quand $X_2 = 1$ l'approximation de coupe minimale à probabilité maximale du graphe $\mathcal{G}_{1,1}^r$ est $\hat{u}_3(\mathcal{G}_{1,1}^r) = 0$,
- La probabilité d'échantillonnage préférentiel est donc

$$\tilde{q}_2^{(2)} = 1.$$

Le ratio de probabilités dans ce cas est

$$\begin{aligned} L(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \frac{1 - q_1}{1 - \tilde{q}_1^{(2)}} \times \frac{q_2}{\tilde{q}_2^{(2)}} \\ &= \frac{1 - q_1}{1 - \tilde{q}_1^{(2)}} \times \frac{q_{(2-3-5-4)}}{\tilde{q}_{(2-3-5-4)}^{(1)}} \\ &= \left(\frac{1 - \epsilon}{1 - \frac{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)}{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)+(1-\epsilon)(\epsilon^2+\epsilon^3-\epsilon^4)}} \right) (\epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^4) \\ &= 2\epsilon^2 + 2\epsilon^3 - 5\epsilon^4 + 2\epsilon^5 \\ &= u. \end{aligned}$$

- Identiquement, si $(X_1 = 0, X_2 = 0)$, les approximations des coupes minimales à probabilité maximale des deux graphes $(\mathcal{G}_{1,0}^r)$ et $(\mathcal{G}_{1,1}^r)$, sont respectivement, $\hat{u}_3(\mathcal{G}_{1,0}^r) = 1$ et $\hat{u}_3(\mathcal{G}_{1,1}^r) = 0$. La probabilité d'échantillonnage préférentiel est donc

$$\tilde{q}_1^{(2)} = 1.$$

Le ratio de probabilités dans ce cas est :

$$\begin{aligned}
L(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \frac{q_1}{\tilde{q}_1^{(2)}} \times \frac{q_2}{\tilde{q}_2^{(2)}} \\
&= \left(\frac{\epsilon}{\frac{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)}{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)+(1-\epsilon)(\epsilon^2+\epsilon^3-\epsilon^4)}} \right) \times \frac{q_{(3-5-4-2)}}{\tilde{q}_{(3-5-4-2)}^{(2)}} \\
&= \left(\frac{\epsilon}{\frac{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)}{\epsilon(\epsilon+2\epsilon^2-3\epsilon^3+\epsilon^4)+(1-\epsilon)(\epsilon^2+\epsilon^3-\epsilon^4)}} \right) (\epsilon + 2\epsilon^2 - 3\epsilon^3 + \epsilon^4) \\
&= 2\epsilon^2 + 2\epsilon^3 - 5\epsilon^4 + 2\epsilon^5 \\
&= u.
\end{aligned}$$

Le nombre de réductions faites par réalisation est égal à la somme des réductions effectuées pour $X_1 = 1$ et le nombre de réductions effectuées pour $X_1 = 0$. Puisque nous avons 2 réductions pour $X_1 = 1$ et 3 réductions pour $X_1 = 0$, le nombre de réductions série-parallèle est égal à 5 par réalisation.

Pour cet exemple, nous obtenons avec l'algorithme *RSPA* un estimateur avec variance nulle, car sa valeur est toujours la valeur exacte de la défiabilité du graphe qui est égale à $u(\mathcal{G})$. En effet, avec *RSPA*, les réductions sont appliquées avant que les approximations soient calculées, et la probabilité d'une coupe minimale peut correspondre à la probabilité d'un ensemble de coupes avec *RSPP*, parceque les coupes peuvent être regroupées, ce qui explique que les approximations des coupes minimales à probabilité maximale obtenues par l'algorithme *RSPA* sont meilleures que celles obtenues par l'algorithme *RSPP*. Nous constatons lors de l'échantillonnage du premier arc du graphe de notre exemple que : les approximations des coupes minimales à probabilité maximale du graphe réduit sont exactement les défiabilités exactes du graphe restant des réductions série-parallèle appliquées, ce qui n'est pas le cas avec l'algorithme *RSPP*.

Comparons les deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* à notre méthode d'approximation basée sur *CoupeMin-ProbMax*, nous remarquons nettement que le nombre de configurations du graphe pour lesquelles $\psi(X) = 1$ avec les algorithmes de réductions est plus petit que le nombre de configurations pour que $\psi(X) = 1$ avec *CoupeMin-ProbMax*. Nous avons 16 configurations avec 5 arcs à échantillonner avec *CoupeMin-ProbMax* contre seulement 2 configurations possibles avec 2 arcs à échantillonner par les deux algorithmes de réductions.

4.4 Comparaison des deux algorithmes *RSPP* et *RSPA*

Les gains que nous estimons avec l'incorporation des réductions série-parallèle dans notre méthode d'échantillonnage préférentiel basée sur *CoupeMin-ProbMax*, sont : le temps de calcul et la variance.

4.4.1 Gain en temps de calcul

- Avec *RSPA*, la recherche des réductions série-parallèle peut demander du temps. En revanche, la diminution du nombre d'arcs à chaque étape pour les deux graphes réduits permet la diminution du nombre d'étapes par rapport à la méthode *CoupeMin-ProbMax*. De plus, cela diminue le temps de la recherche des coupes minimales $\hat{u}(G_{1,k}^r)$, quand les graphes conditionnels admettent des réductions possibles, qui est le cas en général.
- De même que pour l'algorithme *RSPA*, avec *RSPP* le nombre d'étapes nécessaire à l'échantillonnage des arcs diminue, car le nombre d'arcs diminue avec les réductions, mais le temps de recherche des coupes sera plus élevé que celui de *RSPA*, car la recherche des coupes minimales avec *RSPP* se fait sur le graphe non réduits contrairement à l'algorithme *RSPA* où la recherche de ces coupes s'effectue sur des graphes réduits.

4.4.2 Gain en variance

- L'application de réductions permet d'obtenir une meilleure approximation de la défiabilité par les coupes minimales à probabilité maximale à chaque étapes des deux algorithmes, ce qui nous permet d'obtenir en général une plus petite variance. En effet, avec les règles des réductions série-parallèle la fiabilité du graphe initial est préservée, donc la fiabilité du graphe résultant des réductions série-parallèle successives est égale à la fiabilité du graphe initial. D'autre part, le graphe obtenu après une réduction est en général différent d'un graphe qui serait obtenu sans réduction, selon l'ordre d'échantillonnage des arcs les approximations des défiabilités conditionnelles peuvent ne pas être bonnes, en conséquence il n'est pas possible d'assurer une réduction de la variance, même si généralement le cas.

En comparant les deux implementations, l'algorithme *RSPA* nécessite un temps supplémentaire pour faire des copies du graphe et d'effectuer deux fois plus de réductions à n'importe quelle étape donnée. D'autre part, le calcul de la *CoupeMin-ProbMax* sur un graphe déjà réduit prend un temps plus court qu'avant de procéder à une réduction. De plus, les probabilités des arcs sont regroupées et l'approximation des défiabilités est meilleure avec cette procédure.

Nos algorithmes possèdent les propriétés de robustesse suivantes, quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Proposition 1 *Nos algorithmes satisfont L'ERB.*

Preuve:

Nous suivons exactement les arguments du théorème 2.2 et (théorème 3.1) proposé dans le chapitre 3. Le lemme 3.1 peut être appliqué à n'importe quel graphe $\mathcal{G}_{i,k}^r$ ou \mathcal{G}_i^r, k obtenus à l'étape i de l'algorithme 4 ou l'algorithme 3 respectivement.

En particulier nous avons avec *RSPA*

$$u_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r) = \Theta(\epsilon^{c_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r)}), \quad (4.3)$$

où

$$c_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r) = \min\{d : \mathbb{P}[E(\delta)] = \Theta(\epsilon^d) \text{ pour une certaine coupe minimale } \delta \text{ de } (\mathcal{G}_{i,k}^r) \}.$$

Avec *RSPP* nous avons

$$u_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k) = \Theta(\epsilon^{c_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k)}), \quad (4.4)$$

où

$$c_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k) = \min\{d : \mathbb{P}[E(\delta)] = \Theta(\epsilon^d) \text{ pour une certaine coupe minimale } \delta \text{ de } (\mathcal{G}_i^r, k) \}.$$

Les constantes $c_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r) \geq 0$ et $c_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k) \geq 0$ sont indépendante de $\epsilon \forall i \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \{0, 1\}$, mais dépendent respectivement des graphes partiels $\mathcal{G}_{i,k}^r$ et \mathcal{G}_i^r, k .

Fixons l'état des arcs X_1, \dots, X_i à x_1, \dots, x_i , pour les graphes $(\mathcal{G}_{i,k}^r)$ et (\mathcal{G}_i^r, k) nous obtenons avec l'approximation *CoupeMin-ProbMax* ;

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k) &= \Theta(\epsilon^{c_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k)}) \\ &= \Theta(u_{i+1}(\mathcal{G}_i^r, k)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r) &= \Theta(\epsilon^{c_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r)}) \\ &= \Theta(u_{i+1}(\mathcal{G}_{i,k}^r)). \end{aligned}$$

Les approximations *CoupeMin-ProbMax* des graphes réduits $\mathcal{G}_{i,k}^r$ et \mathcal{G}_i^r, k sont du même ordre que les valeurs réelles des défiabilités. Ainsi, les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées. ■

4.5 Illustrations numériques

Dans cette section nous présentons des résultats numériques de l'application combinée de nos deux algorithmes de réductions et de notre plan d'échantillonnage préférentiel proposé dans le chapitre précédent. Nous comparons par la suite les temps de calcul et la variance de l'estimateur obtenus par les algorithmes *RSPP* et *RSPA* avec l'échantillonnage préférentiel basé sur *CoupeMin-ProbaMax*. Nous supposons le cas homogène pour tous les graphes de nos exemples, où les probabilités des arcs sont identiques $q_i = \epsilon$ avec $i = 1, \dots, m$, m étant le nombre d'arcs du graphe. Pour tous les exemples nous cherchons à estimer la probabilité que le nœud s et le nœud t ne soient pas connectés.

Exemple 15 Par cet exemple, nous présentons les résultats numériques du graphe analysé théoriquement par nos deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* représenté par la figure 4.26.

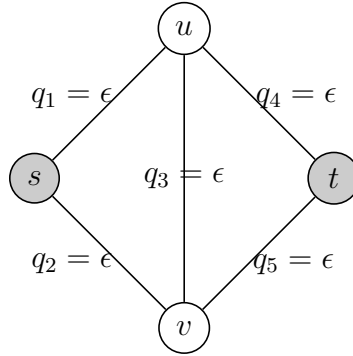


FIGURE 4.26 – Graphe avec cinq arcs.

La taille d'échantillon de nos résultats numériques est $N = 5 \times 10^4$. Le tableau 4.1 décrit les résultats obtenus pour les différentes méthodes : l'estimation de la défiabilité $\widehat{u}(\mathcal{G})$; la variance empirique de l'estimateur Z , l'estimation de l'erreur relative \widehat{Re} , et le temps de calcul (en secondes). Ces estimations sont données pour quatre valeurs de ϵ .

Comme nous l'avons constaté d'après l'analyse théorique de cet exemple, l'erreur relative empirique donnée par l'algorithme *RSPP* tend vers zero quand $\epsilon \rightarrow 0$, ainsi, la propriété de l'erreur relative asymptotiquement nulle est vérifiée. Idem, avec l'algorithme *RSPA*, les résultats empiriques viennent confirmer les résultats obtenus théoriquement, la variance empirique est nulle avec *RSPA* et donc la défiabilité estimée est exactement la défiabilité exacte du graphe avec

TABLE 4.1 – Résultats empiriques de la topologie de la figure 4.26, obtenus par l'approximation *CoupeMin-ProbaMax*, *RSPP* et *RSPA*.

Méthode	ϵ	$\hat{u}(\mathcal{G})$	Variance	\widehat{Re}	Temps
<i>CoupeMin- ProbaMax</i>	10^{-1}	2.152×10^{-2}	2.691×10^{-5}	0.24	2
	10^{-2}	2.02×10^{-4}	3.959×10^{-10}	0.098	2.4
	10^{-3}	2.002×10^{-6}	3.99×10^{-15}	0.031	1.91
	10^{-4}	2.0002×10^{-8}	4.799×10^{-20}	0.010	2.5
<i>RSPP</i>	10^{-1}	2.152×10^{-2}	5.896×10^{-7}	0.03	2
	10^{-2}	2.019×10^{-4}	9.507×10^{-13}	0.004	1.75
	10^{-3}	2.002×10^{-6}	9.948×10^{-19}	0.0005	2.3
	10^{-4}	2.0002×10^{-8}	9.99×10^{-25}	0.00005	1.93
<i>RSPA</i>	10^{-1}	2.152×10^{-2}	0	0	1.28
	10^{-2}	2.0195×10^{-4}	0	0	1.30
	10^{-3}	2.0019×10^{-6}	0	0	1.63
	10^{-4}	2.00019×10^{-8}	0	0	1.37

une erreur relative nulle. La moyenne du nombre de réductions série-parallèle réalisées par les deux algorithmes *RSPA* et *RSPP* pour chaque réalisation est donnée par le tableau 4.2, le nombre de réductions donnée numériquement correspondent au nombre de réduction constatées analytiquement. Comparons nos résultats obtenus par *RSPP* et *RSPA* avec ceux obtenus par l'approximation de l'estimateur à variance nulle basée sur *CoupeMin-ProbaMax*. Le temps de calcul de N réalisations par *RSPA* est plus petit que celui de *RSPP* et par *CoupeMin-ProbaMax*, malgré le nombre de réductions plus important que *RSPP* à chaque réalisation, donnés par le tableau 4.2. Cela vient du fait que le temps consommé pour la recherche des coupes minimales des graphes conditionnels par *RSPP* est plus important que le temps de la recherche des coupes minimales par *RSPA*, car les graphes conditionnels obtenus après les réductions série-parallèle avec *RSPA* sont plus petits que les graphes conditionnels qui ne sont pas encore réduits par *RSPP*. En effet ces réductions viennent après la recherche des coupes minimales à probabilité maximale.

TABLE 4.2 – Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par *RSPP* et *RSPA* pour la topologie de la figure 4.26.

Méthode	nombre moyen de réductions
<i>RSPP</i>	2,51
<i>RSPA</i>	5

Exemple 16 Le second exemple que nous considérons est le réseau représenté par le graphe de la figure 4.27, le dodécaèdre. Ce graphe est souvent utilisé dans

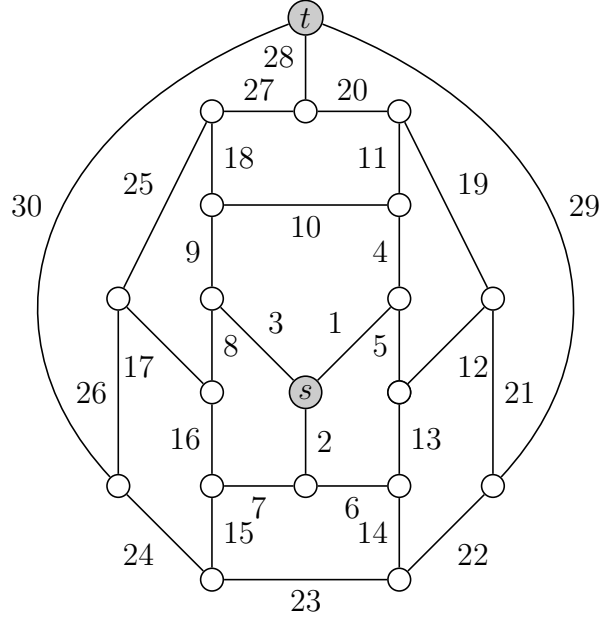


FIGURE 4.27 – Dodécaèdre

la validation des méthodes conçues pour le calcul de la fiabilité des réseaux [15]. Nos résultats sont obtenus avec $N = 5 \times 10^4$ et pour quatre valeurs de ϵ . Le temps de calcul est en minutes. Le nombre moyen de réductions série-parallèle effectuées par simulation ou par réalisation pour les deux algorithmes, est donné par le tableau 4.4.

La variance obtenue par l'algorithme *RSPA* et par l'algorithme *RSPP* est plus petite par rapport à la variance obtenue par l'algorithme *CoupeMin-ProbMax*, car ici aussi les défiabilités conditionnelles sont mieux approchées par l'application des réductions série-parallèle des deux algorithmes *RSPA* et *RSPP*. Le temps de calcul consommé par l'algorithme *RSPA* pour estimer la défiabilité du réseau est nettement plus petit que le temps de calcul par *CoupeMin-ProbMax* et *RSPP*. Le temps de calcul par *RSPP* est du même ordre que le temps de calcul par *CoupeMin-ProbMax*. Le nombre moyen de réductions série-parallèle effectuées par *RSPP* est 7,33, et n'a donc pas trop diminué le nombre d'étapes par rapport au temps de recherche des coupes minimales. Reste à dire que les deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* sont plus performants que *CoupeMin-ProbMax*, car leur efficacité qui se calcule par la multiplication de la variance et le temps [40], [86], est meilleure que celle de *CoupeMin-ProbMax*. L'erreur relative pour cet exemple avec les deux algorithmes est asymptotiquement nulle.

TABLE 4.3 – Résultats empiriques de la topologie de la figure 4.27, obtenus par l'approximation *CoupeMin-ProbMax*, *RSPP* et *RSPA*.

Méthode	ϵ	$\widehat{u}(\mathcal{G})$	Variance	\widehat{Re}	Temps
<i>CoupeMin-ProbMax</i>	10^{-1}	2.888×10^{-3}	4.672×10^{-5}	2.36	1 : 14.33
	10^{-2}	2.063×10^{-6}	1.205×10^{-13}	0.168	1 : 14.58
	10^{-3}	2.006×10^{-9}	1.050×10^{-20}	0.051	1 : 19.35
	10^{-4}	2.0006×10^{-12}	1.119×10^{-27}	0.017	1 : 13.68
<i>RSPP</i>	10^{-1}	2.866×10^{-3}	4.95×10^{-6}	0.77	1 : 21.59
	10^{-2}	2.06×10^{-6}	9.74×10^{-14}	0.15	1 : 17.44
	10^{-3}	2.005×10^{-9}	7.42×10^{-21}	0.042	1 : 17.78
	10^{-4}	2.0007×10^{-12}	1.039×10^{-27}	0.016	1 : 17.36
<i>RSPA</i>	10^{-1}	2.869×10^{-3}	3.50×10^{-6}	0.65	53.71
	10^{-2}	2.062×10^{-6}	4.719×10^{-14}	0.10	48.49
	10^{-3}	2.0059×10^{-9}	3.935×10^{-21}	0.031	56.10
	10^{-4}	2.0007×10^{-12}	6.4×10^{-28}	0.012	48.59

TABLE 4.4 – Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par *RSPP* et *RSPA* pour la topologie de la figure 4.27.

Method	Average number of reductions
<i>RSPP</i>	7, 33
<i>RSPA</i>	11, 99

Exemple 17 Nous considérons le réseau représenté par le graphe de la figure 5.7 qui possède trois dodécaèdres en série. Le nœud source s du réseau de la figure 5.7 est le nœud source du premier dodécaèdre, le nœud destination t est le nœuds destination du troisième dodécaèdre. Un dodécaèdre est placé entre les deux, son nœud source est connecté au nœud destination du premier dodécaèdre, sa destination est connectée à la source du troisième dodécaèdre. Les résultats numériques pour cet exemple sont obtenus avec $N = 5 \times 10^4$ et pour quatre valeurs de ϵ , et sont donnés par le tableau 4.5. Le nombre moyen de réductions série-parallèle effectuées par une réalisation est donné par le tableau 4.6. Le temps de calcul est en minutes.

Les coupes minimales qui possèdent une probabilité maximale ne contiennent pas les arcs à probabilité modifiée ou regroupées après réductions série-parallèle, donc les approximations des coupes minimales à probabilité maximale des graphes conditionnels après réductions sont exactement celles avant réductions. Par exemple : à l'étape i de l'algorithme on suppose que l'arc qu'on échantillonne est dans le premier dodécaèdre, supposons que la coupe minimale à probabilité maximale du

graphe à cette étape se situe dans le second ou le troisième dodécaèdre. Comme la réduction se fait autour de l'arc échantillonné i , donc les probabilités se regroupent seulement dans le premier dodécaèdre, et il se trouve pour cet exemple que la coupe minimale après réduction se trouve toujours dans le second ou le troisième dodécaèdre, et donc la même que sans réduction, en d'autres termes; $\hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i+1}) = \hat{u}_{i+1}(\mathcal{G}_{i+1}^r)$. Cela explique qu'aucune réduction de la variance par les deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* par rapport *CoupeMin-ProbMax*, n'est notée sauf pour $\epsilon = 0.1$.

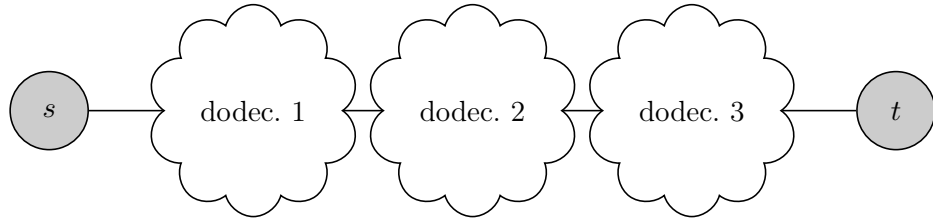


FIGURE 4.28 – Trois dodécaèdres en série.

TABLE 4.5 – Résultats empiriques de la topologie de la figure 5.7, obtenus par l'approximation *CoupeMin-ProbMax*, *RSPP* et *RSPA*.

Méthode	ϵ	$\hat{u}(\mathcal{G})$	Variance	\widehat{Re}	Temps
<i>CoupeMin-ProbMax</i>	10^{-1}	8.526×10^{-3}	6.001×10^{-4}	2.87	15 : 3.49
	10^{-2}	6.170×10^{-6}	6.714×10^{-11}	1.328	19 : 19.5
	10^{-3}	6.005×10^{-9}	5.930×10^{-17}	1.281	17 : 7.55
	10^{-4}	5.982×10^{-12}	5.827×10^{-23}	1.275	19 : 13.0
<i>RSPP</i>	10^{-1}	8.515×10^{-3}	5.674×10^{-4}	2.797	16 : 30.37
	10^{-2}	6.175×10^{-6}	6.701×10^{-11}	1.325	17 : 48.87
	10^{-3}	6.005×10^{-9}	5.902×10^{-17}	1.279	17 : 51.48
	10^{-4}	5.988×10^{-12}	5.832×10^{-23}	1.275	16 : 22.90
<i>RSPA</i>	10^{-1}	8.484×10^{-3}	4.936×10^{-4}	2.618	7 : 34.0
	10^{-2}	6.181×10^{-6}	6.746×10^{-11}	1.328	8 : 14.79
	10^{-3}	6.008×10^{-9}	5.905×10^{-17}	1.279	7 : 19.50
	10^{-4}	5.988×10^{-12}	5.829×10^{-23}	1.275	7 : 8.11

L'efficacité de l'algorithme *RSPA* est meilleure par rapport *RSPP* et *CoupeMin-ProbMax*, vue que les réductions série-parallèle possibles sont plus favorisées avec cet algorithme que *RSPP*, comme nous pouvons le remarquer dans le tableau 4.6. Donc le temps de recherche des coupes minimales à probabilité maximale des graphes conditionnels réduits est moins important que le temps de recherche des

TABLE 4.6 – Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par *RSPP* et *RSPA* pour la topologie de la figure 5.7.

Méthode	Nombre moyen de réductions
<i>RSPP</i>	23,77
<i>RSPA</i>	37,61

coupes minimales à probabilité maximales des graphes conditionnels pas encore réduits.

L'erreur relative obtenue par les deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* comme pour la méthode *CoupeMin-ProbaMax*, est bornée.

Exemple 18 Le tableau 4.7 nous donne les résultats numériques pour trois dodécaèdres montés en parallèle comme c'est représenté par la figure 4.29. Le nœud source du réseau de la figure 4.29 est obtenu par la fusion des trois nœuds sources des trois dodécaèdres, le nœud destination est obtenu par la fusion des trois nœuds destination des trois dodécaèdres. Les résultats sont obtenus avec $N = 5 \times 10^4$ et pour quatre valeurs de ϵ . Le nombre moyen des réductions série-parallèle effectuée par une réalisation est donnée par le tableau 4.8.

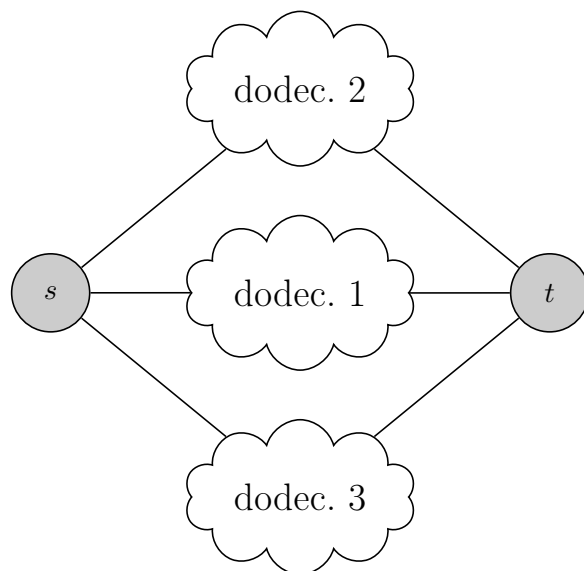


FIGURE 4.29 – Trois dodécaèdres en parallèle.

La variance obtenue par les deux algorithmes *RSPA* et *RSPP* est plus petite que la variance obtenue par *CoupeMin-ProbaMax*, cela est dû aux bonnes approximations des coupes minimales à probabilité maximale trouvées après avoir appliqué les réductions série-parallèle.

TABLE 4.7 – Résultats empiriques de la topologie de la figure 4.29, obtenus par l'approximation *CoupeMin-ProbMax*, *RSPP* et *RSPA*.

Méthode	ϵ	$\hat{u}(\mathcal{G})$	Variance	\widehat{Re}	Temps
<i>CoupeMin-ProbMax</i>	10^{-1}	2.387×10^{-8}	3.715×10^{-15}	2.55	26 : 39.89
	5×10^{-2}	2.599×10^{-11}	2.973×10^{-21}	2.097	26 : 38.59
	2×10^{-2}	4.933×10^{-15}	9.58×10^{-30}	0.62	29 : 19.50
	5×10^{-3}	1.634×10^{-20}	1.059×10^{-41}	0.2	27 : 41.32
<i>RSPP</i>	10^{-1}	2.398×10^{-8}	1.98×10^{-15}	1.85	29 : 38.4
	5×10^{-2}	2.546×10^{-11}	3.181×10^{-22}	0.70	29 : 49.83
	2×10^{-2}	4.93×10^{-15}	2.801×10^{-30}	0.33	29 : 8.59
	5×10^{-3}	1.635×10^{-20}	6.492×10^{-42}	0.155	29 : 53.1
<i>RSPA</i>	10^{-1}	2.425×10^{-8}	2.303×10^{-15}	1.979	18 : 24.15
	5×10^{-2}	2.554×10^{-11}	2.324×10^{-22}	0.596	18 : 19.71
	2×10^{-2}	4.93×10^{-15}	1.832×10^{-30}	0.274	15 : 49.56
	5×10^{-3}	1.634×10^{-20}	4.118×10^{-42}	0.124	16 : 51.1

TABLE 4.8 – Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par *RSPP* et *RSPA* pour la topologie de la figure 4.29.

Method	Average number of reductions
<i>RSPP</i>	9, 78
<i>RSPA</i>	15, 98

La défiabilité des graphes conditionnels réduits est mieux estimée par l'approximation de la coupe minimale à probabilité maximale (la coupe minimale contient les arcs modifiés, obtenus par réductions série-parallèle) que par celle des graphes non réduits (coupe minimale contient les arcs avec les probabilités initiales, sans réduction), car avec les réductions série-parallèle les probabilités des arcs se regroupent, ainsi que les coupes minimales.

L'efficacité des deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* est meilleure par rapport à *CoupeMin-ProbMax*. L'erreur relative par les deux algorithmes *RSPP* et *RSPA* est asymptotiquement nulle.

4.6 Conclusion et discussion

Dans ce chapitre nous avons proposé deux algorithmes d'incorporation des réductions série-parallèle pour notre méthode d'approximation de l'estimateur à

variance nulle basée sur *CoupeMin-ProbMax*, en vue d'accélérer cette dernière. Nous avons appelé ces deux algorithmes selon l'ordre d'application des réductions série-parallèle par rapport à l'échantillonnage préférentiel. Le premier s'appelle algorithme de Réductions Série-Parallèle Postérieur par rapport à l'échantillonnage préférentiel *RSPP*, le second s'appelle algorithme de Réductions Série-Parallèle Antérieur par rapport à l'échantillonnage préférentiel *RSPA*. L'algorithme *RSPP* consiste à appliquer les réductions série-parallèle après l'échantillonnage préférentiel, quant à l'algorithme *RSPA* les réductions série-parallèle sont appliquées avant l'échantillonnage préférentiel. L'avantage de ce dernier est l'application des réductions avant la recherche des coupes minimales à probabilité maximale. Les deux opérations (la compression ou la suppression d'un arc) qui précèdent la recherche des coupes minimales à probabilité maximale, favorisent l'apparition des arcs en série ou en parallèle, ce qui rend les réductions des graphes conditionnels possibles, un des deux graphes conditionnels au moins possède en général des arcs à réduire. Ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme *RSPP*, on réduit un seul graphe conditionnel qui dépend de l'état de l'arc échantillonné. Il peut se trouver selon l'état de l'arc échantillonné que le graphe n'admet aucune réduction possible (exemple : $G_{i+1}(x_i = 0)$) contrairement à son opposé (exemple : $G_{i+1}(x_i = 1)$) qui peut contenir des arcs à réduire. Par conséquent, le temps de la recherche des coupes minimales à probabilité maximale des graphes conditionnels déjà réduits (le cas de *RSPA*) est moins important que le temps de calcul des graphes conditionnels non encore réduits (le cas de *RSPP*). La variance de l'estimateur dans la plus part des cas est réduite, car quand les coupes minimales à probabilité maximale contiennent les arcs modifiés par réductions, les coupes minimales sont regroupées, et donc sont mieux approchées, comme nous l'avons vu à travers nos exemples numériques. Il existe un cas où les coupes minimales à probabilité maximale ne contiennent pas les arcs modifiés par réductions alors l'approximation de ces coupes seront égales aux approximations des coupes minimales à probabilité maximale des graphes conditionnels sans réductions, c'est le cas de notre dernier exemple, la variance obtenue par les deux algorithmes de réductions est du même ordre que la variance obtenue par l'échantillonnage préférentiel seul. En plus de l'amélioration de la variance et le temps de calcul apportée par nos deux algorithmes, nous notons que les estimateurs obtenus par nos deux algorithmes possèdent les mêmes propriétés de robustesse (*ERB* et *ERAN*) que celui obtenu par l'approximation de l'estimateur à variance nulle basée sur la coupe minimale à probabilité maximale. Nous avons remarqué d'après nos résultats numériques que les deux algorithmes sont plus efficaces par rapport à la méthode d'échantillonnage préférentiel seul. L'algorithme *RSPA* nécessite un temps supplémentaire pour faire des copies du graphe et d'effectuer deux fois plus de réductions à n'importe quelle étape donnée, mais le temps de calcul de la *CoupeMin-ProbMax* sur un graphe déjà réduit prend un temps plus court

qu'avant de procéder à une réduction. De plus, les probabilités des arcs sont regroupées et l'approximation des défiabilités est meilleure avec cette procédure. L'algorithme *RSPA* est plus avantageux.

Chapitre 5

L'échantillonnage préférentiel basé sur la combinaison linéaire de la coupe minimale et le chemin minimal à probabilités maximales

Dans ce chapitre nous proposons une approximation des $\hat{u}_{i+1}(\cdot)$ basée sur la combinaison linéaire de deux types de fonctions basiques $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ et $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$ afin de diminuer la variance de l'estimateur basé sur *CoupeMin-ProbMax* $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$. La première fonction basique que nous allons utiliser est $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ basée sur la coupe minimale à probabilité maximale proposée dans le chapitre 3, la seconde fonction $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$ est basée sur le chemin minimal à probabilité maximale. Nous allons montrer dans un premier temps que l'approximation basée sur *CoupeMin-ProbMax* peut se détériorer pour le calcul de la défiabilité des graphes où les probabilités des arcs q_i ne tendent pas vers 0. Nous proposons deux méthodes pour l'approximation du coefficient de la combinaison linéaire. La première méthode est une heuristique basée sur les défiabilités totales, la seconde méthode est basée sur l'approximation stochastique en minimisant la variance.

5.1 Combinaison linéaire de deux approximations

Dans cette section nous présentons un exemple où l'approximation basée sur la *CoupeMin-ProbMax* ne fonctionne pas bien. Pour cette raison nous présenterons une seconde approximation nécessaire à la combinaison linéaire avec l'approximation *CoupeMin-ProbMax*. Cette seconde approximation est basée sur le chemin minimal à probabilité maximale que nous notons par *CheminMin-ProbMax*. Dans la dernière partie de cette section nous présentons la nouvelle approximation

des défiabilités conditionnelles $u_{i+1}(\cdot)$ combinée.

5.1.1 Exemple de motivation

La topologie de la figure 5.1 nous montre un graphe constitué de deux colonnes de nœuds et de r lignes. Nous voulons estimer la probabilité que les deux nœuds s et t ne soient pas connectés. Les défiabilités des arcs sont identiques $\forall i \in \mathcal{E}, q_i = q$. Nous remarquons que le graphe possède trois coupes minimales avec une probabilité maximale q^r . Nous écrivons alors, la coupe minimale à probabilité maximale du graphe est $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^r$.

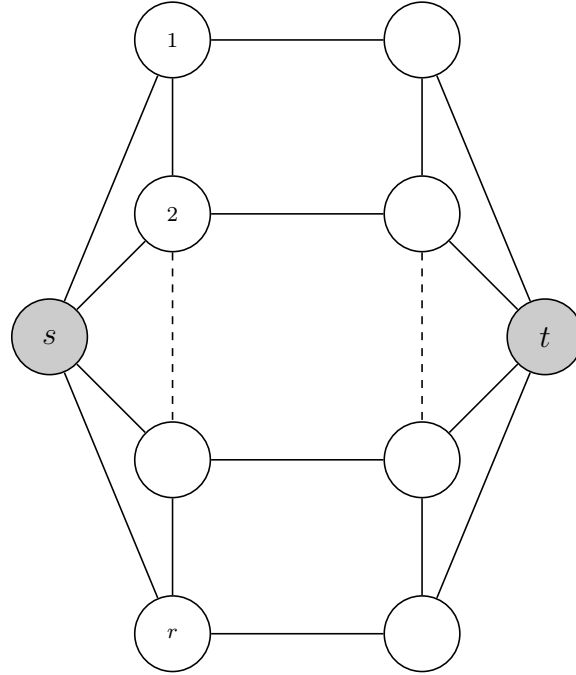


FIGURE 5.1 – Graphe avec r lignes parallèles entre s et t .

Les résultats empiriques pour le graphe de la figure 5.1 sont donnés par le tableau 5.1 avec $N = 5 \times 10^4$ et pour différentes valeurs de r . La valeur de q est ajustée pour chaque valeur de r afin d'obtenir la défiabilité du réseau approximativement égale à 10^{-8} . L'estimation de la défiabilité du réseau \hat{u} est obtenue par l'approximation de l'estimateur à variance nulle basée sur *CoupeMin-ProbaMax*. L'estimation de l'écart-type $\hat{\sigma}$ est donnée pour une seule simulation, l'erreur relative \widehat{Re} est obtenue à partir de la division de l'écart-type $\hat{\sigma}$ par l'estimation de la défiabilité du graphe \hat{u} . L'approximation *CoupeMin-ProbaMax* q^r du graphe entier est donnée dans la dernière colonne du tableau 5.1, pour chaque valeur de r et sa valeur q correspondante.

r	q	$\hat{u} \times 10^{-8}$	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^r$
5	0.02	1.06	4.92×10^{-9}	0.47	3.2×10^{-9}
10	0.1245	1.10	2.33×10^{-8}	2.1	8.94×10^{-10}
30	0.371	1.16	8.54×10^{-8}	7.33	1.2×10^{-13}
70	0.524	1.38	3.61×10^{-7}	26.06	2.25×10^{-20}
100	0.575	1.37	4.56×10^{-7}	33.24	9.2×10^{-25}
200	0.655	0.53	2.4×10^{-7}	45.1	1.77×10^{-37}

TABLE 5.1 – Résultats empiriques pour l'exemple de la figure 5.1, avec $N = 5 \times 10^4$, pour différentes valeurs de r , et q choisi pour que \hat{u} est approximativement égale à 10^{-8} avec l'approximation *CoupeMin-ProbMax*.

Dans le chapitre 3, nous avons montré que l'approximation *CoupeMin-ProbMax* fournit un estimateur avec une erreur relative bornée quand $q \rightarrow 0$, parce que l'approximation coupe minimale à probabilité maximale est du même ordre que les défiabilités conditionnelles réelles. D'après les résultats empiriques du tableau 5.1, nous remarquons que l'erreur relative augmente avec l'augmentation de r . Ce mauvais comportement vient du fait que lorsque q augmente avec r , l'approximation de la coupe minimale à probabilité maximale n'est pas une bonne approximation de la défiabilité du graphe u . En d'autres termes, les valeurs de la dernière colonne du tableau 5.1 $\hat{q}(\mathcal{G}) = \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^r$, qui représentent les approximations des coupes minimales à probabilité maximale du graphe entier pour différentes valeurs de r et de q ne sont pas du même ordre que l'estimation *CoupeMin-ProbMax* de la défiabilité du graphe $\hat{u} \approx 10^{-8}$ donnée par la troisième colonne du tableau 5.1. À titre d'exemple, si nous prenons le graphe avec $r = 100$, nous aurions $\hat{q}(\mathcal{G}) = \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = 0.575^{100} = 9.2 \times 10^{-25}$ qui est très petit par rapport à l'estimation $\hat{u} \approx 10^{-8}$. Contrairement à ce qui est prouvé dans le chapitre 3, l'approximation *CoupeMin-ProbMax* n'est pas adéquate pour l'asymptote r grand et q pas trop petit. Pour améliorer l'approximation *CoupeMin-ProbMax*, nous proposons de la combiner avec une autre approximation présentée dans la section suivante.

5.1.2 Approximation basée sur le chemin minimal à probabilité maximale

Comme nous l'avons défini dans le chapitre 1, un *chemin* dans un graphe \mathcal{G} est un ensemble P de i arcs, sachant que quand ces arcs fonctionnent ($X_i = 1$ pour tous $i \in P$), les nœuds dans \mathcal{K} du graphe résultant sont connectés quelque soit l'état des autres arcs. Un chemin $P(\mathcal{G})$ est dit *minimal* si et seulement si $P(\mathcal{G})$ ne contient pas un sous-ensemble P_{se} qui est aussi un chemin.

La probabilité qu'un *chemin minimal* fonctionne est la probabilité que tous ses arcs fonctionnent, nous avons :

$$p = p(P) = \prod_{i \in P(\mathcal{G})} (1 - q_i),$$

avec q_i la défiabilité individuelle de chaque arc i . Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les chemins minimaux P' du graphe \mathcal{G} . Nous considérons par $E(P')$ l'événement que tous les arcs i de P' fonctionnent. On dit qu'il y a connexion entre deux nœuds dans un graphe si et seulement s'il existe au moins un chemin entre ces deux nœuds. Alors l'approximation de la défiabilité du graphe \mathcal{G} peut s'écrire comme suit :

$$u(\mathcal{G}) = 1 - \mathbb{P} \left[\bigcup_{P' \in \mathcal{P}} E(P') \right]. \quad (5.1)$$

Le *chemin minimal* à probabilité maximale du graphe \mathcal{G} est le chemin possédant la plus grande probabilité,

$$P = \arg \max_{P' \in \mathcal{P}} \mathbb{P}[E(P')].$$

L'approximation de la défiabilité du graphe \mathcal{G} basée sur le chemin minimal à probabilité maximale s'écrit

$$\hat{u}^{\text{mp}}(\mathcal{G}) = 1 - \max_{P \in \mathcal{P}} p(P).$$

Nous appelons cette approximation par *CheminMin-ProbaMax*.

Comme dans le cas de l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* à chaque étape i nous aurons besoin de deux approximations basées sur le *CheminMin-ProbaMax* des défiabilités conditionnelles nécessaires pour le calcul de la nouvelle mesure d'échantillonnage préférentiel \tilde{q}_i . À chaque étape i nous cherchons les approximations du chemin minimal à probabilité maximale $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i)$ des deux graphes $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_i)$ avec $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ et (x_1, \dots, x_i) supposé fixe. Nous obtenons les deux graphes partiels $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_i)$, par la suppression des arcs $j < i$ pour lesquels $x_j = 0$ et la compression des arcs $j < i$ pour lesquels $x_j = 1$. Soit P^- et P^+ les chemins minimaux des deux graphes $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_i)$ avec $x_i = 0$ et $x_i = 1$ respectivement, avec (x_1, \dots, x_i) supposé fixe. Nous avons alors les approximations des défiabilités des graphes conditionnels basées sur le chemin minimal à probabilité maximale suivantes : $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, 1) = 1 - \mathbb{P}[E(P^+)]$ et $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, 0) = 1 - \mathbb{P}[E(P^-)]$. Remplaçant dans (2.6) $\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i)$ par $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i)$, nous obtenons ainsi la défiabilité d'échantillonnage préférentiel basée sur le chemin minimal à probabilité maximale pour chaque arc i comme

suit :

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \tilde{\mathbb{P}}[X_i = 0] \\ &= \frac{q_i \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)}{q_i \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + (1 - q_i) \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

La probabilité que deux nœuds d'un graphe \mathcal{G} soient connectés est $\mathbb{P}[\bigcup_{P' \in \mathcal{P}} E(P')]$, elle est plus grande que la probabilité maximale du chemin minimal $\mathbb{P}[E(P)]$, par conséquent nous obtenons

$$u = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup_{P' \in \mathcal{P}} E(P')\right] \leq \mathbb{P}[E(P)] \leq \hat{u}^{\text{mp}}(\mathcal{G}).$$

Notons que cette approximation basée sur le chemin minimal à probabilité maximale sur-estime la défiabilité conditionnelle réelle, contrairement à l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* qui sous-estime la défiabilité conditionnelle réelle car, la défiabilité du graphe \mathcal{G} , $\mathbb{P}[\bigcup_{\delta' \in \mathcal{C}} E(\delta')]$ est plus grande que l'approximation de la coupe minimale à probabilité maximale $\mathbb{P}[E(\delta)]$. Ce qui nous donne :

$$u = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\delta' \in \mathcal{C}} E(\delta')\right] \geq \mathbb{P}[E(\delta)] \geq \hat{u}^{\text{mc}}(\mathcal{G}),$$

avec \mathcal{C} l'ensemble de toutes les coupes minimales du graphe \mathcal{G} , δ la coupe minimale à probabilité maximale. $[E(\delta)]$ est l'événement que tous les arcs de la coupe δ ne fonctionnent pas.

Exemple 19 Nous considérons le cas homogène où toutes les défiabilités des arcs sont égales $q_i = q$. Nous cherchons la probabilité que les deux nœuds s et t ne soient pas connectés dans le réseau de la figure 5.2. La probabilité que s et t ne soient pas connectés est $u = 2q^2 + 2q^3 - 5q^4 + 2q^5 = 2q^2 + o(q^2)$. La coupe minimale à probabilité maximale du graphe est de cardinalité 2 ce qui nous donne l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* pour le graphe $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^r = q^2$. Le chemin le plus court qui possède une probabilité maximale entre s et t est de cardinalité 2 ce qui nous donne l'approximation *CheminMin-ProbaMax* du graphe $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 1 - (1 - q)^2 = 2q - q^2 = 2q + o(q)$. Nous remarquons pour cet exemple que : $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) > u > \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$.

- Si nous prenons par exemple : $q = 0.1$, la défiabilité du graphe est $u = 0.02$, $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = 0.01$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 0.19$.

Nous remarquons que l'approximation $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ sur-estime la défiabilité contrairement à $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ qui sous-estime la défiabilité du graphe mais elle du même ordre que cette dernière, $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = \Theta(u)$.

- Par contre si : $q = 0.9$, la défiabilité du graphe est $u = 0.978$, alors la fiabilité du graphe est $R = 1 - u = 0.02$, $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = 0.81$, $1 - \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = 0.19$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 0.99$, $1 - \hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 0.01$.

Nous remarquons que l'approximation $1 - \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ sur-estime la fiabilité contrairement à $1 - \hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ qui sous-estime la fiabilité du graphe, mais qui reste du même ordre que cette dernière $(1 - \hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)) = \Theta(1 - u)$.

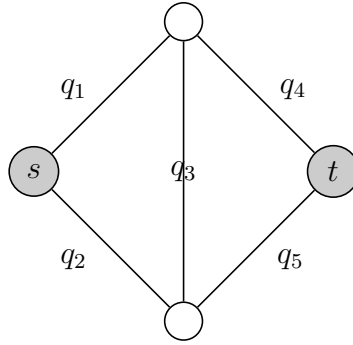


FIGURE 5.2 – Graphe avec cinq arcs

Nous avons montré dans le chapitre 3 que l'estimateur de la défiabilité basé sur l'approximation *CoupeMin-ProbMax* possède une erreur relative bornée pour $q_i \rightarrow 0 \forall i$, parce que les approximations des défiabilités conditionnelles avec *CoupeMin-ProbMax* sont du même ordre que les défiabilités conditionnelles réelles $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot) = \Theta(u_{i+1}(\cdot))$.

Le tableau 5.2 nous montre les résultats numériques pour le graphe de la figure 5.1 obtenus avec l'approximation *CheminMin-ProbMax* avec $N = 5 \times 10^4$. Les valeurs des défiabilités des arcs pour chaque valeur de r sont celles choisies afin d'obtenir l'estimation de la défiabilité du graphe par l'approximation *CcoupeMin-ProbMax* approximativement égale à 10^{-8} pour toutes les valeurs de r .

Quand r augmente l'approximation *CheminMin-ProbMax* est meilleure que l'approximation *CoupeMin-ProbMax* car, l'erreur relative de la cinquième colonne du tableau 5.2 diminue avec l'augmentation de r . Le graphe contient des lignes horizontales de la même grandeur, chaque ligne contient trois arcs entre s et t , donc l'approximation *CheminMin-ProbMax* de la défiabilité du graphe entier $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ pour les différentes valeurs de r est donnée par la dernière colonne du tableau 5.2, elle est égale à $1 - (1 - q)^3$.

r	q	$\hat{u} \times 10^{-8}$	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$
5	0.02	2.26	4.18×10^{-6}	184.74	0.058
10	0.1245	1.07	1.36×10^{-6}	126.85	0.32
30	0.371	1.16	3.04×10^{-7}	26.05	0.75
70	0.524	1.50	2.51×10^{-7}	16.7	0.89
100	0.575	1.51	1.46×10^{-7}	9.64	0.92
200	0.655	1.11	4.166×10^{-8}	3.72	0.95

TABLE 5.2 – Résultats empiriques pour l'exemple de la figure 5.1, avec $N = 5 \times 10^4$, pour différentes valeurs de r et q .

5.1.3 Combinaison linéaire *CoupeMin-ProbaMax* et *CheminMin-ProbaMax*

P. L'Ecuyer et B. Tuffin suggèrent de sélectionner un ensemble fixe de fonctions basiques (v_1, \dots, v_ℓ) indépendantes dans \mathbb{R} , et définissent \mathfrak{V} comme l'espace de toutes les combinaisons linéaires de ces fonctions, i.e., cet espace s'écrit :

$$\mathfrak{V} = \{v = v(\cdot; \theta) = \sum_{i=1}^{\ell} \theta_i v_i(\cdot)\}, \quad (5.3)$$

où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\ell) \in \mathcal{R}^\ell$.

C'est dans cette optique que nous proposons notre plan d'échantillonnage préférentiel adaptatif. Comme nous l'avons vu \hat{u}^{mc} sous-estime et \hat{u}^{mp} sur-estime la défiabilité, pour cela nous présentons dans cette section une combinaison linéaire des deux approximations *CoupeMin-ProbaMax* et *CheminMin-ProbaMax*. Nous procédons de la manière suivante : Les deux fonctions de base que nous choisissons sont : $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}$ et $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}$. Dans (2.6) ou dans (5.2), au lieu d'utiliser $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}$ seule ou $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}$ seule, nous proposons d'utiliser la fonction suivante :

$$\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = \alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(x_1, \dots, x_i) + (1 - \alpha) \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i) \quad (5.4)$$

$\forall i$ et $\forall (x_1, \dots, x_i) \in \{0, 1\}^m$, avec le coefficient $\alpha \in [0, 1]$ qu'on doit choisir. Nous obtenons ainsi la probabilité de l'arc i avec l'échantillonnage préférentiel adaptatif comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i,x_i} &= \tilde{\mathbb{P}}[X_i = x_i] \\ &= \frac{p_{i,x_i}(\alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(x_i) + (1 - \alpha) \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_i))}{q_i(\alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(0) + (1 - \alpha) \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(0)) + (1 - q_i)(\alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(1) + (1 - \alpha) \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(1))}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.1.4 Processus d'estimation de la défiabilité basée sur la combinaison linéaire

Le processus d'estimation de la défiabilité du graphe \mathcal{G} possède deux phases essentielles :

La première phase consiste à chercher α optimal, pour cela nous pouvons utiliser les méthodes données dans la section 5.2.

La seconde phase consiste à calculer les estimations de la défiabilité du graphe et de la variance basée sur l'échantillonnage préférentiel adaptatif utilisant l'approximation de α optimal trouvée dans la première phase. Nous citons les deux phases par l'algorithme 5 suivant :

Algorithme 5 Phases d'échantillonnage préférentiel adaptatif

Première phase : Apprentissage de α voir section 5.2.

Retour l'approximation de α optimal.

Seconde phase : Estimation de la défiabilité du graphe utilisant α retourné par la première phase.

Retour $Z = \psi(X) \times L_\alpha$;

5.2 Apprentissage du coefficient de la combinaison linéaire

Dans cette section nous analysons les méthodes possibles pour l'apprentissage de α et le bon choix de ce paramètre.

5.2.1 Méthodes des moindres carrés

La méthode des moindres carrés est la méthode la plus simple qui permet de trouver une approximation du paramètre α optimal de la combinaison linéaire en minimisant la quantité suivante :

$$S(\alpha) = \sum_{j=1}^y |\hat{u}_{j+1}(\mathbf{x}_j, \alpha) - \hat{u}|^2;$$

\hat{u} est l'estimation de u pour un nombre fini n (\hat{u} obtenue par l'équation (2.1) en utilisant une des deux approximations \hat{u}^{mc} ou \hat{u}^{mp}), \mathbf{x}_j étant le vecteurs (x_1, \dots, x_m) de l'état du graphe, et y le nombre de vecteur \mathbf{x}_j choisis. Aucune règle n'existe pour le choix optimal de ces vecteurs \mathbf{x}_j , pour cet inconvénient nous ne exploitons pas cette méthode pour la recherche du α optimal.

5.2.2 Heuristique basée sur les défiabilités totales

Cette heuristique consiste à utiliser la combinaison linéaire des approximations des défiabilités du graphe entier, nous obtenons alors,

$$u = u(\emptyset) = \alpha \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) + (1 - \alpha) \hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset),$$

cela nous donne

$$\alpha = \frac{\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) - u}{\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) - \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)}, \quad (5.6)$$

La valeur de α se trouve toujours dans $[0, 1]$, car nous avons $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) \geq u \geq \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$. Nous exploitons ici peu d'informations, i.e., α est calculé seulement pour les défiabilités du graphe entier, qui n'est pas forcément un bon ajustement des autres défiabilités conditionnelles dans l'espace d'état. Les valeurs des approximations $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ sont faciles à calculer, u non connue, peut être remplacée dans (5.6) par une estimation $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$ obtenue, par exemple, en utilisant l'échantillonnage préférentiel basé sur *CoupeMin-ProbaMax* avec une taille d'échantillon relativement petite n_0 . Remplaçant u par son estimateur $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$ dans (5.6), nous obtenons la valeur de α optimal basée sur les défiabilités totales, nous la mentionnons par α_{tot} .

$$\alpha = \alpha_{\text{tot}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) - \hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})}{\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) - \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)}. \quad (5.7)$$

Cette valeur α_{tot} peut ne pas se situer dans $[0, 1]$, car $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$ peut contenir du bruit, dans ce cas nous pouvons faire la projection de la valeur de α_{tot} dans $[0, 1]$ en prenant la borne la plus proche dans $[0, 1]$.

5.2.3 Approche basée sur la minimisation de la variance

Soit $\tilde{P}_\alpha[X = x]$ la distribution d'échantillonnage préférentiel. Soit $V(\alpha)$ la variance de l'estimateur $Z = \psi(X)L_\alpha(X)$, avec $L_\alpha(X) = \mathbb{P}[X = x]/\tilde{P}_\alpha[X = x]$. Sélectionner un α optimal qu'on note α_{opt} ou sélectionner une meilleure distribution d'échantillonnage préférentiel $\tilde{P}_\alpha[X = x]$ revient à minimiser la variance $V(\alpha)$ par rapport au coefficient α , cela peut se formuler par l'équation suivante :

$$\alpha_{\text{opt}} = \min_{\alpha} V(\alpha) = \min_{\alpha} V(\psi(X)L_\alpha(X)) \quad (5.8)$$

avec

$$\begin{aligned} V(\alpha) = V(\psi(X)L_\alpha(X)) &= \tilde{E}_\alpha[\psi(X)L_\alpha^2(X)] - (\tilde{E}_\alpha[\psi(X)L_\alpha(X)])^2 \\ &= \tilde{E}_\alpha[\psi(X)L_\alpha^2(X)] - u^2. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème de minimisation de la variance (5.8) est équivalent à minimiser le moment d'ordre 2 suivant :

$$\alpha_{opt} = \min_{\alpha} \tilde{\mathbb{E}}_{\alpha}[\psi(X)L_{\alpha}^2(X)]. \quad (5.9)$$

Dans la littérature, la minimisation de (5.8) est fréquemment utilisé lors de la conception d'un plan d'échantillonnage préférentiel optimal et cela dans plusieurs applications, spécifiquement dans les modèles de fils d'attentes et de fiabilité; exemple : [4], [21], [22], [88], [90] et [93]. Même idée est utilisée dans la finance par [106] et [115]. Une méthode adaptative avec les variables de contrôles est conçue dans [55].

La question qui se pose est comment peut-on calculer l'approximation de la valeur de α minimisant (5.9)? Puisque (5.9) est un problème d'optimisation stochastique, les deux algorithmes traditionnels d'optimisation stochastique sont : l'algorithme de Robbins-Monro (Robbins et Monro 1951) et l'algorithme de Kiefer-Wofowitz (Kiefer et Wofowitz 1952).

5.2.3.1 Algorithme de Robbins-Monro [81]

L'algorithme de Robbins-Monro (RM) permet d'estimer la racine α^* annulant une fonction objectif $h(\cdot)$ (dans notre cas $V'(\alpha)$). En général RM consiste à la suite itérative suivante :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - a_k \widehat{\nabla} h(\alpha_k), \quad (5.10)$$

où $(a_k)_{k \geq 0}$ désigne un « *pas* » déterministe positif (appelé aussi « séquence » ou « *step sizes* » voir par exemple [74, 117]), qui satisfait les conditions $\sum_k a_k = \infty$ et $\sum_k a_k^2 < \infty$ pour une convergence ($\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha^*$). Il est recommandé dans [103] d'utiliser la forme du *pas* $(a_k)_{k \geq 0}$ comme suit :

$$a_k = \frac{e}{(C + k)^{\beta}},$$

où $e > 0$, $C > 0$ constante de stabilité et $\beta \in (1/2, 1]$. Pour la selection de ces valeurs (voir par exemple [103], ou [76]), dans notre cas nous adoptons la technique dite semi-automatique [104], et les valeurs que nous avons choisis sont données dans la section des résultats numériques. $\widehat{h}(\alpha_k)$ est la fonction objectif, dans notre cas c'est $\tilde{E}_{\alpha}[\psi(X)L_{\alpha}^2(X)]$ et $\widehat{\nabla} h(\alpha_k)$ l'estimation de la dérivée ∇h en α_k (dans notre cas $\widehat{V}'(\alpha_k)$). Appliquons la forme générale de RM pour notre cas nous obtenons alors :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - a_k \widehat{V}'(\alpha_k). \quad (5.11)$$

- Estimation de la dérivée de la variance

Nous obtenons à partir de (5.5) la probabilité d'échantillonnage préférentiel basée sur la combinaison linéaire des approximations $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ et $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$ suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_{i,x_i} &= \tilde{\mathbb{P}}[X_i = x_i] \\
 &= \frac{p_{i,x_i}(\alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(x_i) + (1-\alpha)\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_i))}{q_i(\alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(0) + (1-\alpha)\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(0)) + (1-q_i)(\alpha \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(1) + (1-\alpha)\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(1))} \\
 &= \frac{p_{i,x_i} \hat{u}_{i,\alpha}(x_i)}{q_i \hat{u}_{i,\alpha}(0) + (1-q_i) \hat{u}_{i,\alpha}(1)} \\
 &= \frac{p_{i,x_i} \hat{u}_{i,\alpha}(x_i)}{\hat{u}_{i,\alpha}^{\text{tot}}}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Notons p_{i,x_i} la probabilité originale de l'arc i avec x_i son état, si $x_i = 1$ alors $p_{i,1} = p_i = 1 - q_i$, sinon $p_{i,0} = q_i$. De la même façon, notons la nouvelle probabilité basée sur la combinaison linéaire pour l'arc i , $\tilde{p}_{i,1} = \tilde{p}_i = 1 - \tilde{q}_i$ si $x_i = 1$, $\tilde{p}_{i,0} = \tilde{q}_i$ sinon. La variance de l'estimateur $Z = \psi(X)L_\alpha^2(X)$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 V(\alpha) &= \tilde{\mathbb{E}}_\alpha [\psi(X)L_\alpha^2(X)] \\
 &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \left(\frac{\mathbb{P}[X=x]}{\tilde{\mathbb{P}}_\alpha[X=x]} \right)^2 (\tilde{\mathbb{P}}_\alpha[X=x]) \\
 &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \frac{(\mathbb{P}[X=x])^2}{\tilde{\mathbb{P}}_\alpha[X=x]} \\
 &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \prod_{i=1}^m \frac{p_{i,x_i}}{\frac{p_{i,x_i} \hat{u}_{i,\alpha}(x_i)}{\hat{u}_{i,\alpha}^{\text{tot}}}} \\
 &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \prod_{i=1}^m \frac{p_{i,x_i} \hat{u}_{i,\alpha}^{\text{tot}}}{\hat{u}_{i,\alpha}(x_i)} \\
 &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \prod_{i=1}^m \left(p_{i,x_i} \frac{\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}}{\alpha \hat{v}_i(x_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i)} \right),
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_i(x_i) &= \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(x_1, \dots, x_i) - \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i) \\
 \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i) &= \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i) \\
 \hat{v}_i^{\text{tot}} &= p_i \hat{v}_i(1) + q_i \hat{v}_i(0) \\
 \hat{u}_i^{\text{mp,tot}} &= p_i \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) + q_i \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0).
 \end{aligned}$$

D'après (5.9) la minimisation de la variance revient à minimiser le moment d'ordre 2, en conséquence l'estimation de la dérivée de la variance $V(\alpha)$ revient à estimer la dérivée de $\tilde{E}_\alpha[\psi(X)L_\alpha^2(X)]$, cela nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \sum_{i=1}^m p_{i,x_i} \frac{\hat{v}_i^{\text{tot}} \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i) - \hat{v}_i(x_i) \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}}{(\alpha \hat{v}_i(x_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i))^2} \prod_{e=1, e \neq i}^m \left(p_{e,x_e} \frac{\alpha \hat{v}_e^{\text{tot}} + \hat{u}_e^{\text{mp,tot}}}{\alpha \hat{v}_e(x_e) + \hat{u}_e^{\text{mp}}(x_e)} \right) \\ = \tilde{\mathbb{E}}_\alpha \left[\psi(X) L^2(X) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{v}_i^{\text{tot}} \hat{u}_i^{\text{mp}}(X_i) - \hat{v}_i(X_i) \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}}{(\alpha \hat{v}_i(X_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(X_i))(\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}})} \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Il existe plusieurs autres approches permettant d'estimer le gradient de la variance $\widehat{V}'(\alpha_k)$: L'Analyse des perturbations infinitésimales (IPA)[36], méthode du rapport de vraisemblance ou fonction score [38], [39], processus décisionnels de Markov (PDM) [34] et l'approche dite « punch-out » [87].

5.3 Algorithme d'approximation stochastique

Dans cette section nous fournissons l'algorithme permettant la recherche d'une approximation de α optimal et le calcul de l'estimateur de la défiabilité d'un graphe \mathcal{G} . L'algorithme 6 est basé sur l'approximation stochastique, constitué de deux phases : la première phase itérative, consiste à la recherche ou l'apprentissage du paramètre de la combinaison linéaire α ; il s'agit de déterminer une approximation du paramètre α qui minimise la variance de l'estimateur de la défiabilité Z . Pour cela nous calculons à chaque itération k l'estimation de la dérivée de la variance $\widehat{V}'(\alpha_k)$ exprimée par (5.14) pour une taille d'échantillon n_k relativement petite. Une fois l'approximation de α optimal obtenue dans la première phase, nous remplaçons dans la seconde phase α de la combinaison linéaire par α_{opt} pour le calcul de l'estimateur de la défiabilité \hat{u} du graphe \mathcal{G} avec N grand.

Dans la première phase de l'algorithme 6, nous choisissons une valeur de α_0 initiale, le bon choix de cette valeur est important, elle doit être approximativement dans la zone où se trouve le α_{opt} , afin d'optimiser le temps de recherche dans l'intervalle $[0, 1]$. Ensuite vient le choix des paramètres du *pas* $a_k = f(e, C, \beta)$. Un mauvais choix de ces paramètres peut influencer la convergence de l'algorithme d'approximation stochastique dans la recherche de l'optimum de α , le choix de ces paramètres est considéré comme un problème non trivial [76]. Pour le choix de ces paramètres, Nous avons utilisé la technique semi automatique que Spall propose dans [104]. La valeur de β est souvent recommandée être prise inférieure à 1 (e.g., [94] ; [60]), car a_k décroît très lentement quand k augmente, ce qui permet une meilleure convergence vers la solution α^* . Il est recommandé de prendre la constante de stabilité C approximativement égale à 5 ou 10% du temps total

de calcul (le temps d'apprentissage de α et le temps d'estimation de la défiabilité du graphe) ou de taille d'échantillon N . La constante e est choisie de la façon que $[e/(C+0)^\beta]\hat{\mathcal{V}}'(\alpha_0)$ soit approximativement égale au changement de grandeur voulu dans la première itération, avec $\hat{\mathcal{V}}'(\alpha_0)$ la moyenne de l'estimation de la dérivée de la variance pour $\alpha = \alpha_0$, obtenue avec n_{α_0} copie de $\hat{V}'(\alpha_0)$. Les valeurs de β et C que nous avons utilisé dans nos résultats numériques sont données dans la section suivante.

À chaque itération k dans la première phase de l'algorithme 6, l'estimation de la dérivée de la variance $\hat{V}'(\alpha_k)$ est obtenue pour n_k copies indépendantes de

$$\psi(X)L^2(X) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{v}_i^{\text{tot}} \hat{u}_i^{\text{mp}}(X_i) - \hat{v}_i(X_i) \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}}{(\alpha \hat{v}_i(X_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(X_i))(\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}})}.$$

La mise à jour de α_k est faite par (5.11), le α optimal retenu est la moyenne suivante :

$$\bar{\alpha}_{k_0,k} = \frac{1}{k - k_0} \sum_{\ell=k_0+1}^k \alpha_\ell, \quad (5.15)$$

avec k_0 un entier fixe et $k_0 \approx k/10$. Nous avons considéré le critère d'arrêt de l'approximation stochastique suivant : $k > k_{\min}$ et $E < \epsilon$ avec k_{\min} le nombre d'étape minimale de l'approximation stochastique, $E = \sum_{j=k-k_{\min}+1}^k |\alpha_{j+1} - \alpha_j|$ et $\epsilon > 0$ un nombre positif très petit, à l'issue de cette phase nous obtenons l'approximation de $\hat{\alpha}_{\text{opt}} = \bar{\alpha}_{k_0,k}$.

Dans la seconde phase nous calculons l'estimation de la défiabilité \hat{u} du graphe \mathcal{G} , en moyennant N copies indépendantes de la variable $Z = \psi(X)L_{\alpha_{\text{opt}}}(X)$ utilisant le paramètre $\hat{\alpha}_{\text{opt}}$ obtenu dans la première phase de la combinaison linéaire des deux approximations $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ et $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$, l'estimation de la variance est donnée pour une seule variable $Z = \psi(X)L_{\alpha_{\text{opt}}}(X)$.

Algorithme 6 L'algorithme d'approximation stochastique pour estimer α_{opt} basée sur la minimisation de la variance

Phase d'apprentissage de α .

Choisir une valeur initiale de α_0 qu'on pense proche de α optimal et k la mise à jour du paramètre α ;

Sélectionner les paramètres β , e , C , k_0 , k_{\min} et ϵ ;

$k := 0$;

répéter

Calculer l'estimation de la dérivée de la variance $\hat{V}'(\alpha_k)$ utilisant n_k simulations indépendantes avec l'échantillonnage préférentiel adaptatif(5.4) et avec $\alpha = \alpha_k$;

calculer α_{k+1} via (5.11) ;

calculer $E = \sum_{j=k-k_{\min}+1}^k |\alpha_{j+1} - \alpha_j|$;

$k := k + 1$;

jusqu'à $k > k_{\min}$ et $E < \epsilon$;

Retour $\hat{\alpha}_{opt} = \bar{\alpha}_{k_0, k}$.

Phase d'estimation de la défiabilité de \mathcal{G} pour une seule réalisation avec $\hat{\alpha}_{opt}$.

$\alpha = \hat{\alpha}_{opt}$;

$L \leftarrow 1$;

pour $i = 1$ to m **faire**

trouver la coupe minimale δ_i^- à probabilité maximale et le chemin minimal P_i^- qui correspondent à $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0)$;

$\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) \leftarrow \hat{\alpha}_{opt} \mathbb{P}[E(\delta_i^-)] + (1 - \hat{\alpha}_{opt})(1 - \mathbb{P}[E(P_i^-)])$;

trouver la coupe minimale δ_i^+ à probabilité maximale et le chemin minimal P_i^+ qui correspond à $\mathcal{G}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1)$;

$\hat{u}_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) \leftarrow \hat{\alpha}_{opt} \mathbb{P}[E(\delta_i^+)] + (1 - \hat{\alpha}_{opt})(1 - \mathbb{P}[E(P_i^+)])$;

calculer $\tilde{q}_i = 1 - \tilde{p}_{i, x_i}$ avec \tilde{p}_{i, x_i} donnée par (5.5) ;

générer U_i une variable aléatoire uniforme sur $(0, 1)$;

si $U_i < \tilde{q}_i$ **alors**

$x_i \leftarrow 0$; $L_i \leftarrow q_i / \tilde{q}_i$;

sinon

$x_i \leftarrow 1$; $L_i \leftarrow (1 - q_i) / (1 - \tilde{q}_i)$;

finsi

$L \leftarrow L \times L_i$;

fin pour

Retour $Z = \psi(x_1, \dots, x_m) \times L$;

5.4 Résultats numériques

Dans cette section nous présentons les résultats numériques de la méthode d'échantillonnage préférentiel adaptatif (ou de l'échantillonnage préférentiel basé sur la combinaison linéaire de deux approximations), sur des exemples différents. On utilise les deux techniques d'apprentissage citées dans les sections précédentes, telles que « l'Heuristique basée sur les défiabilités totales », « l'Approche d'approximation stochastique basée sur la minimisation de la variance utilisant la dérivée de la variance », que nous notons par « Heuristique », « AS-V », respectivement. Nous comparons ensuite les résultats obtenus par la méthode d'échantillonnage préférentiel adaptatif aux résultats obtenus par l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* seule et l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CheminMin-ProbaMax* seule.

Pour tous les exemples que nous présentons dans cette section et avec les trois techniques, nous estimons la défiabilité du graphe \mathcal{G} , l'écart-type empirique d'une seule simulation, l'estimation de l'erreur relative et l'approximation de la valeur de α_{opt} . Dans la première phase qui est la phase d'apprentissage de α , nous avons utilisé les paramètres suivants pour tous nos exemples : $\beta = 0.6$, comme c'est recommandé dans [76], $C = 10^8$, $[e/(C+0)^\beta]\hat{\mathcal{V}}'(\alpha_0)$. $n_{\alpha_0} = 1$, pour chaque étape k nous prenons $n_{\alpha_k} = 100$ ce qui nous permet de passer 5% du temps total de calcul, $\epsilon = 10^{-8}$, $k_{\min} = 4$. Dans le cas de l'heuristique, nous utilisons $n_0 = 10^4$ pour estimer $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$ pour le calcul de α_{tot} . $N = 5 \times 10^4$.

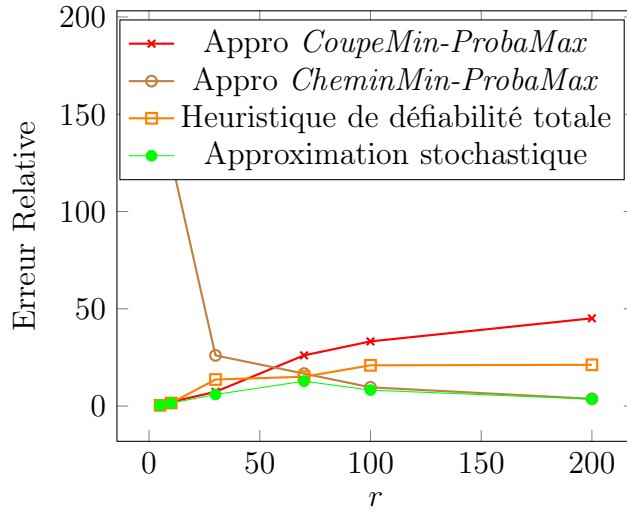
Exemple 20 Nous reprenons l'exemple de motivation et nous présentons dans le tableau 5.3 les résultats numériques pour le graphe de l'exemple de motivation, représenté par la figure 5.1 utilisant les deux techniques : « Heuristique », « AS-V », respectivement, pour les six valeurs de r .

Nous remarquons que la valeur de α_{opt} pour toutes les valeurs de r est proche de 1, car $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ est proche de 1, $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$ est d'ordre 10^{-8} , les valeurs de $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ sont trop petites quand q et r augmentent, donc négligeables dans le calcul de la valeur de α_{opt} , ce qui nous donne $1 - \alpha_{tot} \approx 10^{-8}\hat{u}^{mp}(\emptyset)$. Nous avons vu que l'erreur relative utilisant l'approximation *CheminMin-ProbaMax* seule n'est pas bonne pour de petites valeurs de r et qui devienne meilleure quand r et q augmentent, inversement à l'approximation *CoupeMin-ProbaMax*, qui donne une bonne erreur relative pour les petites valeurs de r , qui se dégrade quand r et q augmentent. L'erreur relative pour la plupart des valeurs de r donnée par la méthode adaptative utilisant l'heuristique pour l'apprentissage de α est meilleure que celle obtenue par l'échantillonnage préférentiel basée sur l'approximation *CoupeMin-ProbaMax*, mais par rapport à l'approximation *CheminMin-ProbaMax* elle est bonne pour de petites valeurs de r et de q , et pas pour de grandes valeurs de r .

L'erreur relative pour toutes les valeurs de r et de q obtenue par la méthode adaptative, utilisant pour l'apprentissage de α l'approximation stochastique basée

App	r	q	$\hat{u} \times 10^{-8}$	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{\alpha}_{opt}$
Heuristique	5	0.020	1.06	3.944×10^{-9}	0.37	0.99999987
	10	0.1245	1.10	1.735×10^{-8}	1.57	0.999999969
	30	0.371	1.20	1.644×10^{-7}	13.65	0.999999983
	70	0.524	1.46	2.216×10^{-7}	15.08	0.999999982
	100	0.575	1.60	3.354×10^{-7}	20.95	0.999999987
	200	0.655	1.18	2.502×10^{-7}	21.20	0.999999927
AS-V	5	0.020	1.06	3.455×10^{-9}	0.32	0.999999943
	10	0.1245	1.10	1.725×10^{-8}	1.55	0.999999971
	30	0.371	1.09	6.509×10^{-8}	5.94	0.999999998
	70	0.524	1.48	1.899×10^{-7}	12.79	0.95590917
	100	0.575	1.45	1.196×10^{-7}	8.2	0.79998443
	200	0.655	1.11	3.982×10^{-8}	3.56	0.44001154

TABLE 5.3 – Estimation de la défiabilité de graphe de la figure 5.1.

FIGURE 5.3 – L'erreur relative obtenue par les différentes méthodes d'échantillonnage préférentiel pour l'exemple de la figure 5.1, par rapport au nombre de ligne r .

sur la minimisation de la variance (dérivée de la variance), est meilleure que celle donnée par la méthode adaptative basée sur l'heuristique ou celle donnée par l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* seule ou sur *CheminMin-ProbaMax* seule. Nous représentons par la figure 5.3 l'erreur relative obtenue par les deux approximations *CoupeMin-ProbaMax* seule

ou par *CheminMin-ProbaMax* seule et par les deux méthodes "Heuristique" et l'approximation stochastique ("RM-V") en fonction des valeurs de r .

Exemple 21 Nous considérons un second exemple pour lequel nous cherchons à estimer la probabilité que les deux nœuds s et t ne soient pas connectés. Le graphe est représenté par la figure 5.4 constitué de deux lignes parallèles, sur chaque ligne il existe m arcs et v nœuds entre s et t avec $m = v + 1$. Nous considérons que les défiabilités des arcs sont identiques et sont égales à q . Le tableau 5.5 fourni

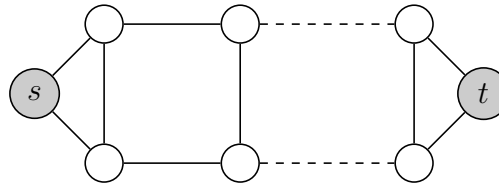


FIGURE 5.4 – Graphe constitué de deux lignes entre s et t , chaque ligne contient m arcs.

l'estimation de la défiabilité du graphe de l'exemple 21 \hat{u} , l'écart type empirique d'une seule simulation $\hat{\sigma}$ et l'erreur relative empirique \widehat{Re} (qui est le rapport entre de l'écart type et l'estimation de la défiabilité). Les deux approximations *CoupeMin-ProbaMax* et *CheminMin-ProbaMax* du graphe entier sont fournies par le tableau 5.4. L'approximation basée sur *CoupeMin-ProbaMax* du graphe entier est $\hat{u}^{mc}(\emptyset) = q^2$ car le graphe possède deux lignes et c'est le cardinal le plus grand de toutes les coupes possibles. Le chemin le plus court du graphe possède m arcs, ce qui nous donne l'approximation de la défiabilité du graphe entier basée sur *CheminMin-ProbaMax* $\hat{u}^{mp}(\emptyset) = 1 - (1 - q)^{v+1}$. Les résultats numériques sont obtenus par les différentes méthodes d'échantillonnage préférentiel.

q	v	$\hat{u}^{mc}(\emptyset)$	$\hat{u}^{mp}(\emptyset)$
0.1	2	10^{-2}	0.270
	10	10^{-2}	0.686
	20	10^{-2}	0.8905
0.5	2	0.25	0.875
	10	0.25	0.999
	20	0.25	0.9999995

TABLE 5.4 – Estimation des défiabilités $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ du graphe donné par la figure 5.4.

La première ligne du tableau 5.5 correspond à l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* seule que nous notons MC, la

Appr	q	v	\hat{u}	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{\alpha}$
MC	0.5	2	0.672	0.284	0.424	
		10	0.993	1.684	1.695	
		20	0.995	1.717	1.725	
	0.1	2	0.0329	0.0164	0.50	
		10	0.1204	0.604	5.0	
		20	0.2696	19.426	72.0	
MP	0.5	2	0.672	0.1346	0.2	
		10	0.988	0.0484	0.048	
		20	0.9998	6.2153×10^{-3}	0.0062	
	0.1	2	0.032	0.0487	1.482	
		10	0.121	0.1784	1.469	
		20	0.219	0.2887	1.316	
Heuristique	0.5	2	0.672	0.0925	0.137	0.32
		10	0.988	0.0455	0.046	0.014
		20	0.9998	6.333×10^{-3}	0.0063	1.84×10^{-4}
	0.1	2	0.0329	0.0121	0.36	0.91
		10	0.12	0.0465	0.38	0.83
		20	0.218	0.0862	0.39	0.76
AS-V	0.5	2	0.671	0.09045	0.134	0.391
		10	0.989	0.04183	0.042	0.0463
		20	0.9998	6.049×10^{-3}	0.0060	8.652×10^{-4}
	0.1	2	0.033	0.0111	0.338	0.946
		10	0.12	0.0414	0.344	0.876
		20	0.218	0.0703	0.322	0.828

TABLE 5.5 – Estimation de la défiabilité du graphe donné par la figure 5.4.

deuxième correspond à l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CheminMin-ProbaMax* seule que nous notons MP. La troisième et la quatrième lignes correspondent à la méthode d'échantillonnage préférentiel adaptatif avec respectivement les différentes techniques d'apprentissage de α suivantes : « l'Heuristique » basée sur les défiabilités totales du graphe et l'approximation stochastique basée sur la minimisation de la variance « SA-V », et cela pour deux différentes valeurs de q . Nous avons considéré trois valeurs de v pour chaque valeur de q . L'erreur relative donnée par l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* augmente quand le nombre d'arcs (entre s et t) $m = v + 1$ augmente quelle que soit la défiabilité des arcs, cela s'explique par l'augmentation du nombre de coupes minimales à probabilité maximale qui est égal à m , or, avec *CoupeMin-ProbaMax* nous considérons qu'une seule coupe minimale à probabilité maximale, contrairement à l'erreur relative donnée par *CheminMin-ProbaMax* qui diminue en augmentant m . Quand q et m augmentent, $\hat{u} \rightarrow 1$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) \rightarrow 1 \forall \hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) < \hat{u}$ on a $\hat{\alpha} \rightarrow 0$. L'approximation de α_{opt} donnée par l'approximation stochastique avec la minimisation de la variance (dérivée de la variance) est meilleure, par exemple :

pour $m = 21$, \widehat{Re} diminue de 72 avec MC à 0.32 avec AS-V.

Exemple 22 Nous considérons un graphe avec une seule ligne constitué de m arcs entre s et t , représenté par la figure 5.5. Nous supposons le cas homogène (défiabilité de tous les arcs identique) $q_i = q$. Nous cherchons à calculer la probabilité que les deux nœuds s et t ne soient pas connectés. La défiabilité pour ce graphe est facilement calculable, elle est donnée par : $u = 1 - (1 - q)^m$.

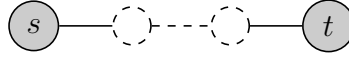


FIGURE 5.5 – Graphe avec une ligne constituée de m arcs.

L'approximation basée sur *CoupeMin-ProbaMax* du graphe entier est $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^1$, car le graphe possède une seule ligne et c'est le cardinal le plus grand de toutes les coupes possibles. Le chemin le plus court du graphe possède m arcs, ce qui nous donne l'approximation de la défiabilité du graphe entier basée sur *CheminMin-ProbaMax* $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 1 - (1 - q)^m$, nous remarquons que cette approximation est exactement la même que la défiabilité du graphe u . Les deux approximations pour les différentes valeurs de m sont données par le tableau 5.6.

q	m	$\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$	$\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$
10^{-9}	20	10^{-9}	1.999×10^{-8}
	40	10^{-9}	3.999×10^{-8}
	100	10^{-9}	9.999×10^{-8}

TABLE 5.6 – Estimation des défiabilités $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ du graphe de la figure 5.5.

Les résultats numériques pour cet exemple sont donnés par le tableau 5.7 pour une valeur de $q = 10^{-9}$, ce qui nous donne la défiabilité du graphe \hat{u} de l'ordre de 10^{-8} pour les trois valeurs de m . L'erreur relative donnée par *CoupeMin-ProbaMax* augmente quand m augmente, car l'approximation basée sur *CoupeMin-ProbaMax* ne prend en considération qu'une seule coupe minimale à probabilité maximale. L'erreur relative est nulle avec *CheminMin-ProbaMax*, ce qui signifie que nous avons obtenu un estimateur à variance nulle, car l'approximation de la défiabilité du graphe pour chaque m basée sur *CheminMin-ProbaMax* ($\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$) correspond exactement à la défiabilité du graphe \hat{u} , et cela nous donne une valeur de $\hat{\alpha} = 0$ par les deux techniques, l'heuristique basée sur les défiabilités totales et l'approximation stochastique basée sur la minimisation de la variance (dérivée de la variance).

Appr	q	m	$\hat{u} \times 10^{-8}$	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{\alpha}$
MC	10^{-9}	20	3.828	3.348×10^{-6}	87.459	
		40	6.974	9.678×10^{-6}	138.77	
		100	6.974	9.678×10^{-6}	138.77	
MP	10^{-9}	20	1.999	0	0	
		40	3.999	0	0	
		100	9.999	0	0	
heuristique	10^{-9}	20	1.999	0	0	0
		40	3.999	0	0	0
		100	9.999	0	0	0
SA-V	10^{-9}	20	1.999	0	0	0
		40	3.999	0	0	0
		100	9.999	0	0	0

TABLE 5.7 – Estimation de la défiabilité du graphe de la figure 5.5.

Exemple 23 Nous considérons dans cet exemple le graphe de la figure 5.6 appelé dodécaèdre, souvent utilisé dans la littérature pour valider expérimentalement les méthodes conçues pour l'estimation de la défiabilité des graphes statiques. Il contient 30 arcs et 20 nœuds, nous considérons le cas homogène où les fiabilités des arcs sont identiques et égalent à q .

L'approximation basée sur *CoupeMin-ProbMax* de la défiabilité du graphe entier donnée par $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^3$, car nous avons trois arcs sortants de s et trois arcs entrants dans t , éliminant un seul ensemble de ces arcs (trois entrants ou trois sortants) suffisent pour provoquer la déconnexion des deux nœuds s et t , donc la coupe minimale à probabilité maximale possède trois arcs. L'approximation de la défiabilité du graphe entier basée sur le chemin minimal à probabilité maximale est $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 1 - (1 - q)^5$, car le chemin le plus court entre s et t possède cinq arcs. Les valeurs des deux approximations correspondantes aux différentes valeurs de q sont données par le tableau 5.8.

q	$\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$	$\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$
10^{-1}	10^{-3}	0.409
10^{-2}	10^{-6}	0.049
10^{-3}	10^{-9}	0.0049
10^{-4}	10^{-12}	4.999×10^{-4}

TABLE 5.8 – Estimation des défiabilités $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ du dodécaèdre représenté par la figure 5.6.

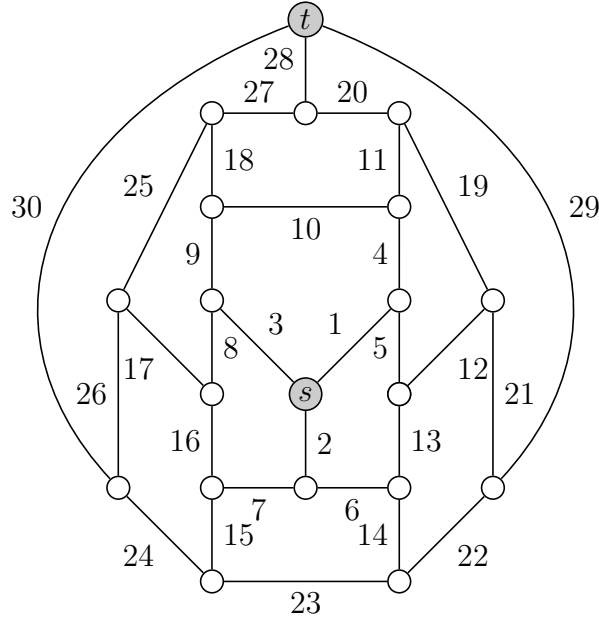


FIGURE 5.6 – Dodécaèdre.

L'estimation de la défiabilité du dodécaèdre, l'écart-type empirique d'une seule simulation, l'erreur relative et l'approximation de α , obtenus pour cet exemple par *CoupeMin-ProbaMax*, *CheminMin-ProbaMax*, l'Heuristique, AS-V, sont fournis par le tableau 5.9 pour quatre valeurs de q .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, pour cet exemple avec l'approximation basée sur *CoupeMin-ProbaMax* l'erreur relative diminue avec q , donc la propriété d'*ERAN* est vérifiée. L'erreur relative obtenue par l'approximation *CheminMin-ProbaMax* augmente pour $q = 10^{-1}$ et $q = 10^{-2}$ et complètement erronée pour $q = 10^{-3}$ et $q = 10^{-4}$. Cela est dû à l'existence des configurations importantes qui ne sont pas échantillonnées ; le bruit énorme de la variance affecte le calcul de la défiabilité obtenue par *CheminMin-ProbaMax*, et elle est égale à la moitié de la défiabilité réelle pour $q = 10^{-3}$ et $q = 10^{-4}$. L'approximation obtenue par l'heuristique pour $q = 10^{-1}$ est meilleure que celle obtenue par les deux approximations *CoupeMin-ProbaMax* ou par *CheminMin-ProbaMax*. Quand $q \rightarrow 0$, l'approximation par l'heuristique est acceptable par rapport à l'approximation *CheminMin-ProbaMax* mais elle reste moins bonne que les résultats obtenus par *CoupeMin-ProbaMax*, car les valeurs de $\hat{\alpha}$ obtenues pour ces cas ne présentent pas un bon équilibre entre $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$. Vu que le calcul de $\hat{\alpha}$ est basé sur peu d'informations, on n'utilise que $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$. L'erreur relative pour tous q obtenue par *CoupeMin-ProbaMax* est améliorée par la méthode adaptative (l'approximation stochastique), comme nous le remarquons dans le tableau 5.9.

Appr	q	\hat{u}	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{\alpha}$
MC	10^{-1}	2.888×10^{-3}	6.835×10^{-3}	2.366	
	10^{-2}	2.063×10^{-6}	3.472×10^{-7}	0.168	
	10^{-3}	2.006×10^{-9}	1.025×10^{-10}	0.051	
	10^{-4}	2.000×10^{-12}	3.346×10^{-14}	0.016	
MP	10^{-1}	2.950×10^{-3}	0.0199	6.74	
	10^{-2}	2.303×10^{-6}	2.013×10^{-4}	87.4	
	10^{-3}	1.002×10^{-9}	4.651×10^{-11}	0.046	
	10^{-4}	1.000×10^{-12}	1.429×10^{-14}	0.014	
Heuristique	10^{-1}	2.887×10^{-3}	2.514×10^{-3}	0.87	0.995
	10^{-2}	2.066×10^{-6}	6.766×10^{-7}	0.32	0.999978
	10^{-3}	2.009×10^{-9}	6.054×10^{-10}	0.30	0.99999979
	10^{-4}	2.004×10^{-12}	5.982×10^{-13}	0.298	0.9999999979
AS-V	10^{-1}	2.87×10^{-3}	2.005×10^{-3}	0.698	0.9933
	10^{-2}	2.063×10^{-6}	3.388×10^{-7}	0.164	0.9999978
	10^{-3}	2.005×10^{-9}	8.777×10^{-11}	0.043	0.9999999966
	10^{-4}	2.001×10^{-12}	2.835×10^{-14}	0.014	0.999999999991

TABLE 5.9 – Estimation de la défiabilité du dodécaèdre représenté par la figure 5.6.

L'erreur relative obtenue par la méthode adaptative basée sur l'approximation stochastique (AS-V) est meilleure que celle obtenue par *CoupeMin-ProbMax* seule ou *CheminMin-ProbMax* seule ou par la méthode adaptative basée sur l'heuristique.

Exemple 24 Dans cet exemple, nous considérons un grand graphe où la simulation est primordiale, constitué de trois dodécaèdres en série comme le montre la figure 5.7. La source s du graphe de la figure 5.7 est la source du premier dodécaèdre, le nœud destination du premier dodécaèdre est fusionné avec le nœud source du second dodécaèdre, le nœud destination du second dodécaèdre est fusionné avec le nœud source du troisième dodécaèdre, le nœud t du graphe est le nœud destination du troisième dodécaèdre. Nous considérons aussi pour cet exemple le cas homogène où les défiabilités des arcs sont identiques est $q_i = q$. La fiabilité estimée du graphe devrait être le cube de la fiabilité d'un seul dodécaèdre.

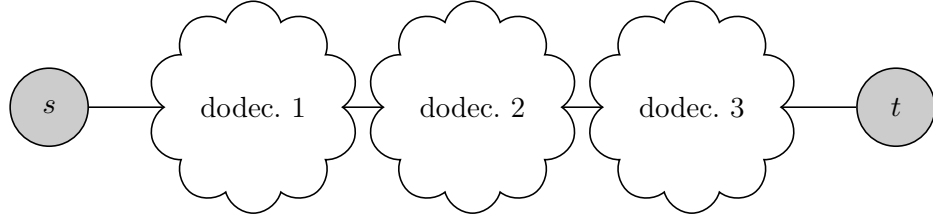


FIGURE 5.7 – Trois dodécaèdres en série.

L'approximations de la défiabilité du graphe basée sur *CoupeMin-ProbMax* est $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^3$, trois est le nombre minimum d'arcs qu'il faut supprimer pour provoquer la déconnexion des deux nœuds s et t , le graphe possède six coupes minimales de cardinal trois, elles contiennent les arcs sortants de s de chaque dodécaèdre ou entrants dans t de chaque dodécaèdre. L'approximation de la défiabilité du graphe basée sur *CheminMin-ProbMax* est $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 1 - (1 - q)^{15}$, car le chemin le plus court entre s et t de chaque dodécaèdre comporte cinq arcs. Les approximations $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ sont fournies dans le tableau 5.10, pour quatre valeurs de q .

q	$\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$	$\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$
10^{-1}	10^{-3}	0.794
10^{-2}	10^{-6}	0.139
10^{-3}	10^{-9}	1.489×10^{-2}
10^{-4}	10^{-12}	1.498×10^{-3}

TABLE 5.10 – Estimation des défiabilités $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ des trois dodécaèdres en série.

L'estimation de la défiabilité du graphe de la figure 5.7, l'écart type empirique pour une seule simulation et l'erreur relative empirique, obtenus par *CoupeMin-ProbMax*, *CheminMin-ProbMax*, l'Heuristique et l'approximation stochastique

Appr	q	\hat{u}	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{\alpha}$
MC	10^{-1}	8.526×10^{-3}	2.449×10^{-2}	2.873	
	10^{-2}	6.170×10^{-6}	8.194×10^{-6}	1.328	
	10^{-3}	6.007×10^{-9}	7.700×10^{-9}	1.281	
	10^{-4}	5.982×10^{-12}	7.633×10^{-12}	1.275	
MP	10^{-1}	8.361×10^{-3}	0.0561	6.718	
	10^{-2}	4.929×10^{-6}	3.908×10^{-4}	79.273	
	10^{-3}	1.001×10^{-9}	6.082×10^{-11}	0.060	
	10^{-4}	1.0002×10^{-12}	1.738×10^{-14}	0.017	
Heuristique	10^{-1}	8.628×10^{-3}	6.392×10^{-3}	0.74	0.99
	10^{-2}	6.19×10^{-6}	1.938×10^{-6}	0.31	0.999963
	10^{-3}	6.018×10^{-9}	1.652×10^{-9}	0.274	0.99999966
	10^{-4}	6.003×10^{-12}	1.613×10^{-12}	0.268	0.9999999966
AS-V	10^{-1}	8.61×10^{-3}	6.217×10^{-3}	0.72	0.991
	10^{-2}	6.181×10^{-6}	1.596×10^{-6}	0.258	0.999971
	10^{-3}	6.017×10^{-9}	1.381×10^{-9}	0.229	0.99999972
	10^{-4}	6.001×10^{-12}	1.310×10^{-12}	0.218	0.9999999975

TABLE 5.11 – Estimation de la défiabilité des trois dodécaèdres en série.

(AS-V) pour quatre valeurs de q sont fournis dans le tableau 5.11. L'approximation de α optimal par les méthodes d'apprentissages (Heuristique, AS-V) est donnée par la colonne six du tableau 5.11. L'erreur relative obtenue par *CoupeMin-ProbMax* quand $q \rightarrow 0$ est bornée.

Comme pour un seul dodécaèdre, pour cet exemple aussi nous avons une mauvaise estimation de la défiabilité par *CheminMin-ProbMax*. L'erreur relative donnée par l'approximation *CheminMin-ProbMax* augmente pour $q = 10^{-1}$ et $q = 10^{-2}$, puis complètement erronée pour de petites valeurs de q , cela est dû à la mauvaise estimation de la défiabilité car il existe des configurations importantes qui ne sont pas échantillonnées par *CheminMin-ProbMax* qui provoque le grand bruit de la variance pour $q = 10^{-3}$ et $q = 10^{-4}$. L'erreur relative obtenue par la méthode adaptative est aussi bornée. Contrairement aux résultats d'un seul dodécaèdre, la variance empirique est réduite par rapport à la variance obtenue par *CoupeMin-ProbMax* même quand $q \rightarrow 0$, utilisant soit l'heuristique basée sur les défiabilités totales soit l'approximation stochastique basée sur la minimisation de la variance (AS-V). Car, le graphe de la figure 5.7 possède plusieurs coupes minimales à probabilité maximale, mais l'échantillonnage préférentiel basé sur l'approximation *CheminMin-ProbMax* ne prend en considération qu'une seule coupe minimale à probabilité maximale. L'approximation stochastique donne un meilleur résultat.

Exemple 25 Nous considérons un autre grand graphe dans cet exemple où la simulation est primordiale comme l'exemple précédent, constitué de trois dodécaèdres en parallèle comme le montre la figure 5.8. La source s du graphe de la figure 5.8 est la fusion des nœuds source des trois dodécaèdres, le nœud t du graphe est la fusion des nœuds destination des trois dodécaèdres. Nous considérons aussi pour cet exemple le cas homogène où les défiabilités des arcs sont identiques est $q_i = q$. La défiabilité du graphe est connue, elle est égale au cube de la défiabilité d'un seul dodécaèdre.

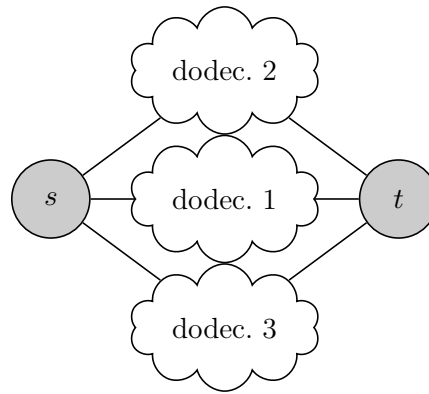


FIGURE 5.8 – Trois dodécaèdre en parallèle.

Les approximations *CoupeMin-ProbMax* et *CheminMin-ProbMax* de la défiabilité du graphe sont fournies par le tableau 5.12 pour quatre valeurs de q . Le nombre minimum d'arcs à supprimer pour déconnecter s de t est neuf, donc l'approximation *CoupeMin-ProbMax* du graphe est $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset) = q^9$, et le chemin le plus court du graphe possède cinq arcs, alors l'approximation de la défiabilité du graphe basée sur *CheminMin-ProbMax* est $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset) = 1 - (1 - q)^5$.

q	$\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$	$\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$
10^{-1}	10^{-9}	0.409
5×10^{-2}	1.953×10^{-12}	0.226
10^{-3}	10^{-18}	0.049
8×10^{-3}	1.342×10^{-19}	0.0393

TABLE 5.12 – Estimation des défiabilités $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$ des trois dodécaèdres en parallèle.

Les résultats numériques pour cet exemple sont fournis par le tableau 5.13 pour quatre valeurs de q , avec les différentes méthodes d'échantillonnage préférentiel. Nous avons dans le tableau 5.13, l'estimation de la défiabilité du graphe, la variance empirique pour une seule simulation, l'erreur relative empirique et l'approximation du paramètre optimal de la combinaison linéaire. L'erreur relative obtenue par l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* est asymptotiquement nulle, contrairement à l'erreur relative obtenue par l'approximation *CheminMin-ProbaMax* qui augmente quand $q \rightarrow 0$, elle est erronée pour $q = 8 \times 10^{-3}$ car la défiabilité est mal estimée, donc la variance est trop bruitée.

Appr	q	\hat{u}	$\hat{\sigma}$	\widehat{Re}	$\hat{\alpha}$
MC	10^{-1}	2.387×10^{-8}	6.095×10^{-8}	2.553	
	5×10^{-2}	2.599×10^{-11}	5.4528×10^{-11}	2.0973	
	10^{-2}	8.763×10^{-18}	2.568×10^{-18}	0.293	
	8×10^{-3}	1.153×10^{-18}	3.008×10^{-19}	0.26	
MP	10^{-1}	1.833×10^{-8}	1.163×10^{-6}	63.48	
	5×10^{-2}	1.288×10^{-11}	3.703×10^{-10}	28.73	
	10^{-2}	1.847×10^{-18}	1.683×10^{-16}	91.14	
	8×10^{-3}	1.437×10^{-19}	1.066×10^{-19}	0.742	
Heuristique	10^{-1}	2.452×10^{-8}	1.17×10^{-7}	4.77	0.99999994
	5×10^{-2}	2.648×10^{-11}	1.137×10^{-10}	4.294	0.99999999989
	10^{-2}	8.763×10^{-18}	2.568×10^{-18}	0.293	1
	8×10^{-3}	1.153×10^{-18}	3.008×10^{-19}	0.26	1
AS-V	10^{-1}	2.406×10^{-8}	5.432×10^{-8}	2.25	0.99999999043
	5×10^{-2}	2.606×10^{-11}	4.31×10^{-11}	1.656	0.999999999974
	10^{-2}	8.763×10^{-18}	2.568×10^{-18}	0.293	1
	8×10^{-3}	1.153×10^{-18}	3.008×10^{-19}	0.26	1

TABLE 5.13 – Estimation de la défiabilité des trois dodécaèdres en parallèle.

L'erreur relative obtenue par la méthode adaptative, utilisant l'heuristique basée sur les défiabilités totales du graphe, augmente pour $q = 10^{-1}$ et $q = 5 \times 10^{-2}$, car les valeurs de $\hat{\alpha}$ obtenues pour ces deux cas ne présentent pas un bon équilibrage entre $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$. Vu que le calcul de $\hat{\alpha}$ est basé sur peu d'informations, on n'utilise que $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$, d'un autre coté, l'erreur relative pour $q = 8 \times 10^{-3}$ et $q = 10^{-2}$ est égale à l'erreur relative obtenue par l'approximation *CoupeMin-ProbaMax*, car dans le calcul de $\hat{\alpha}$ avec l'heuristique les valeurs de $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et \hat{u}_{n_0} sont négligeables par rapport à $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$, la valeur de $\hat{\alpha}$ pour ces cas est égale à 1, donc seule $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ est considérée pendant l'échantillonnage. L'erreur relative obtenue par la méthode adaptative utilisant l'approximation stochastique avec minimisation de la variance (AS-V), est égale à l'erreur relative

obtenue par l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* pour $q \rightarrow 0$, car les défiabilités conditionnelles $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ sont du même ordre que les défiabilités réelles, de plus la sous-estimations de ces dernières par *CoupeMin-ProbaMax* est négligeable car elles sont trop petites, soit $(1 - \hat{\alpha} \leq \Theta(\hat{u}))$.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode d'échantillonnage préférentiel adaptatif basée sur la combinaison linéaire de deux approximations suivantes : la première approximation est basée sur la coupe minimale à probabilité maximale *CoupeMin-ProbaMax*, nous l'avons noté $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$, qui sous-estime la défiabilité conditionnelle $u_{i+1}(\cdot)$. La seconde approximation est basée sur la chemin minimal à probabilité maximale *CheminMin-ProbaMax* que nous avons noté $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$, qui sur-estime la défiabilité conditionnelle $u_{i+1}(\cdot)$. Différentes techniques sont proposées pour l'apprentissage du coefficient d'ajustement des deux approximations : La première technique est une heuristique qui repose sur les défiabilités totales, elle consiste à remplacer dans la combinaison linéaires les fonctions basiques $\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$ et $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$ respectivement par $\hat{u}^{\text{mc}}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{\text{mp}}(\emptyset)$, le premier terme de l'équation de la combinaison linéaire $\hat{u}_{i+1}(\cdot)$ est remplacé par l'estimation de la défiabilité du graphe $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$ obtenue en pré-simulation utilisant une des deux approximations précédentes avec n_0 relativement petit. L'approximation de α optimal que nous avons noté α_{tot} est alors calculée avec ces trois valeurs ($\hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(\cdot)$, $\hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(\cdot)$ et $\hat{u}_{n_0}(\mathcal{G})$), facile à calculer. La seconde technique est l'approximation stochastique basée essentiellement sur la minimisation de la variance (utilisant la dérivée de la variance), le minimiseur des deux quantités est l'approximation de α optimal, que nous avons obtenu par l'algorithme de Robbins-Monro.

Pour une bonne approximation du α optimal, l'approximation stochastique est plus avantageuse par rapport à l'heuristique basée sur les défiabilités totales, car, avec l'approximation stochastique on prend en considération toutes les combinaisons linéaires lors de la construction des configurations échantillonnées du graphe, contrairement à l'heuristique qui ne prend en considération que les défiabilités totales du graphe pour le calcul de α optimal.

Nos résultats numériques sur différents exemples nous montrent que la méthode d'échantillonnage préférentiel adaptatif est plus efficace en général par rapport à l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* seule ou par rapport à l'approximation *CheminMin-ProbaMax* seule, et cela pour plusieurs asymptotes et contextes. La méthode adaptative se résume à *CoupeMin-ProbaMax*, quand cette dernière est efficace. Lorsque l'approximation *CoupeMin-ProbaMax* est moins pertinente, la méthode adaptative l'améliore en équilibrant le manque de cette approximation par l'approximation *CheminMin-ProbaMax*, pour mieux approcher les défiabilités

conditionnelles afin d'obtenir un bon estimateur de la défiabilité.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

6.1 Conclusion

L'objectif de cette thèse est d'étudier les méthode d'échantillonnage préférentiel et de les appliquer au calcul de la fiabilité des réseaux hautement fiables. Lorsque les composantes d'un réseau de communication sont sujets à des défaillances, on souhaite cerner leur impact sur le comportement global du réseau. Dans ce cadre, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de la fiabilité et plus précisément, au calcul de la probabilité qu'un ensemble de noeuds communiquent entre eux dans un réseau non orienté (bidirectionnel), où les noeuds sont parfaits est les arcs sont sujets à des défaillances aléatoires indépendantes. Un paramètre de rareté est attribué à chaque arc du graphe qui désigne la défiabilité de ces derniers. Nos méthodes sont étudiées et analysées pour l'asymptote où les défiabilités des arcs sont trop petites. D'un point de vue algorithmique, le problème de la fiabilité d'un réseau de communication est un problème **NP**-difficile. Dans ce cadre, nous proposons les contributions suivantes :

- Développer une méthode d'approximation de l'estimateur à variance nulle basée sur l'échantillonnage préférentiel, le processus d'échantillonnage assimilé à une chaîne de Markov. À chaque étape de la chaîne de Markov, les probabilités originales d'échantillonnage des arcs du graphe sont échangées par de nouvelles probabilités, déterminées en fonction des états des arcs précédemment échantillonnés. L'ancien estimateur est multiplié par le rapport de probabilités (entre les probabilités originales et les nouvelles probabilités). Ainsi, nous obtenons un nouveau estimateur sans biais. Les nouvelles probabilités sont en fonction des défiabilités des graphes conditionnés sur les arcs précédemment échantillonnés par les nouvelles probabilités. Nous avons proposé une approximation de ces défiabilités qu'on ne connais pas, l'approximation est basée sur les coupes minimales possédant la plus grande

probabilité, qui peuvent être calculées en temps polynomial. La fiabilité du graphe est calculée en moyennant N réalisations de la nouvelle variable aléatoire, elle est égale pour chaque réalisation, au produit de la fonction indicatrice qui donne l'état du graphe par le rapport des probabilités. D'après l'analyse théorique et les résultats expérimentaux, de notre approximation basée sur la coupes minimales à probabilité maximale, l'estimateur obtenu possède deux bonnes propriétés de robustesse, telles que l'erreur relative bornée et l'erreur relative asymptotiquement nulle pour des conditions supplémentaires. Cette dernière propriété n'est jusqu'à maintenant pas vérifiée par aucune méthode dans la littérature.

- Dans le but d'accélérer notre méthode d'échantillonnage préférentiel basé sur les coupes minimales à probabilité maximale, nous avons proposé d'introduire des techniques de réductions de deux manières différentes dans le processus d'échantillonnage des arcs. Des réductions série-parallèle sont appliquées au graphe selon l'état de l'arc en cours d'échantillonnage, elles sont postérieures par rapport à l'échantillonnage préférentiel. L'autre proposition est de réduire les deux graphes avant l'échantillonnage préférentiel pour pouvoir gagner en temps nécessaire à la recherche des coupes minimales. Les estimateurs obtenus par ces techniques possèdent les mêmes propriétés de robustesse que la méthode d'échantillonnage préférentiel, de plus, un gain en variance et en temps de calcul est observé en général.
- Une méthode d'échantillonnage préférentiel basée sur la combinaison linéaire de deux approximations est proposée. L'une des deux approximations est basée sur la coupe minimale à probabilité maximale qui sous-estime la défiabilité, l'autre est basée sur le chemin minimal à probabilité maximale qui sur-estime la défiabilité. Une heuristique et une approximation stochastique sont proposées pour l'apprentissage du coefficient de la combinaison linéaire. D'après nos résultats, cette méthode adaptative vient améliorer l'approximation *CoupeMin-ProbaMax*, dans le cas où cette dernière est moins pertinente, en ajustant son manque (sous-estimation) par l'approximation *CheminMin-ProbaMax*.

6.2 Perspectives

Pour les travaux ultérieurs, nous proposons les axes suivants :

- L'ordre de visite des arcs peut avoir un impact sur les performances de nos algorithmes proposés, et que nous n'avons pas une méthode particu-

lière d'ordonnement à proposer pour le moment. Nous soulignons que pour l'algorithme *CoupeMin-ProbMax*, la propriété *ERB* est toujours vérifiée, quel que soit l'ordre dans lequel les arcs sont échantillonnés, d'autre part, pour la propriété *ERAN* l'ordre d'échantillonnage peut être important. Ainsi, l'ordre peut avoir un impact sur les performances de la procédure d'estimation, à la fois en termes de variance et de temps d'exécution. Un point est alors intéressant à analyser et étudier, il s'agit de l'influence de l'ordre d'échantillonnage des arcs dans le graphe sur les performances de nos algorithmes d'échantillonnage préférentiel.

- Selon l'ordre d'échantillonnage des arcs, utilisant seulement les réductions série-parallèle, un sous-graphes du graphe \mathcal{G} peut être réduit en un seul arc suspendu (d'ordre 1). Ainsi à l'étape i de la chaîne de Markov, la probabilité de cet arc peut ne pas correspondre à une bonne approximation coupe minimale à probabilité maximale de la défiabilité conditionnelle du graphe. Nous proposons en plus des réductions série-parallèle, d'intégrer la réduction des arcs de degrés 1, ceci peut se faire de cette manière :

Par exemple, si on a un nœud $s \in \mathcal{N}$ de degré 1, i.e., si un seul arc est relié à ce s , nous avons deux possibilités :

- si $s \notin \mathcal{K}$, l'état de l'arc relié à s n'a aucune influence sur la fiabilité du graphe, donc le nœud s et l'arc qui le relie peuvent être supprimés ;
- si $s \in \mathcal{K}$, supposons q la défiabilité de l'arc relié à s dans le graphe \mathcal{G} , et \mathcal{G}' le graphe réduit après avoir fusionné le nœud s avec son nœud voisin (le nœud obtenu est toujours dans \mathcal{K}). Il est facile de voir que $u(\mathcal{G}) = 1 - (1 - q)(1 - u(\mathcal{G}'))$. Les réductions successives de degrés 1 du nœud s , peuvent se formuler de la manière suivante :

$$Y = L(1 - (1 - q_i)(1 - Y')),$$

avec Y (respectivement Y') une variable aléatoire. La moyenne calculée à partir de plusieurs variables indépendantes Y (respectivement Y') nous donne la défiabilité du graphe $u(\mathcal{G})$ (respectivement $u(\mathcal{G}')$), et L le ratio de probabilités après réduction degrés 1.

- Nous avons d'un côté, l'approximation basée sur *CheminMin-ProbMax* sur-estime beaucoup la défiabilité du graphe quand $\epsilon \rightarrow 0$ et d'autre part, la recherche de la coupe minimale à probabilité maximale nécessite un temps polynomial. Comme troisième axe d'investigation, nous proposons de choisir et d'étudier les caractéristiques en temps de calcul et d'estimation, d'autres fonctions basiques pour une combinaison linéaire afin d'approcher les défiabilités conditionnelles.

- En plus de l'approximation stochastique basée sur la dérivée de la variance pour chercher un meilleur paramètre de notre combinaison linéaire, nous proposons d'utiliser deux autres méthodes d'approximation stochastiques basées respectivement sur l'optimisation de l'entropie croisée (appelée aussi la distance *Kullback Leibler*) ou la minimisation de la variance utilisant l'estimation de la dérivée déterminée par les différences finies centrées (appelée aussi Algorithme de Kiefer-Wofowitz). Pour plus de précision sur ces deux méthodes nous présentons quelques notions de leur utilisation dans notre cas :

6.2.1 Algorithme de Kiefer-Wofowitz [54]

La technique de minimisation de la variance utilisant l'estimation de la dérivée déterminée par les différences finies centrées dans la suite RM (5.10) s'appelle méthode de Kiefer-Wofowitz (KW). La différence entre RM et KW est l'estimation de ∇h . L'algorithme de KW utilise les différences finies pour estimer ∇h (qui est dans notre cas $V'(\alpha)$), ainsi est donnée par :

$$\begin{aligned} V'(\alpha) &\approx \frac{V(\alpha + \xi) - V(\alpha - \xi)}{2\xi} \\ &= \frac{\tilde{\mathbb{E}}_{\alpha+\xi} [\psi(X)L^2(X)] - \tilde{\mathbb{E}}_{\alpha-\xi} [\psi(X)L^2(X)]}{2\xi}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Avec $\xi = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ et $\xi \rightarrow 0$, la limite de (6.1) est équivalente à (5.14). L'inconvénient de cette méthode c'est qu'on doit estimer la variance en deux points $\alpha - \xi$ et $\alpha + \xi$, ce qui fait un double effort en temps de calcul par rapport à la méthode de RM.

6.2.2 Approche basée sur la minimisation de l'entropie croisée

Une autre technique pour chercher un meilleur paramètre de notre combinaison linéaire est la technique dite d'entropie croisée. Appelée aussi entropie relative ou distance de *Kullback Leibler*, elle consiste à minimiser la distance entre la mesure d'échantillonnage préférentiel $d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha > 0$ et la mesure originale $d\mathbb{P} > 0$. Soit $D(\mathbb{P}, \tilde{\mathbb{P}}_\alpha)$ la distance *Kullback Leibler* entre \mathbb{P} et $\tilde{\mathbb{P}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} D(\mathbb{P}, \tilde{\mathbb{P}}_\alpha) &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(X) \log \frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha} d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha \\ &= \mathbb{E}_\alpha [\psi(X) \log L_\alpha(X)], \end{aligned} \quad (6.2)$$

avec $L_\alpha = d\mathbb{P}/d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha$ le *ratio* de probabilités

La méthode de l'entropie-croisée (CE) [20] attribuée à Reuven Rubinstein est une méthode générale d'optimisation de type Monte-Carlo, combinatoire ou continue, et d'échantillonnage préférentiel. La méthode a été conçue à l'origine pour la simulation d'événements rares [88], [92], où des densités de probabilité très faibles doivent être estimées correctement, par exemple dans l'analyse de la sécurité des réseaux, les modèles de file d'attente, ou l'analyse des performances des systèmes de télécommunication. La méthode CE peut être appliquée à tout problème d'optimisation combinatoire où les observations sont bruitées comme le problème du voyageur de commerce, l'optimisation quadratique, le problème de la coupure maximale et les problèmes d'allocation de mémoire, tout comme des problèmes d'optimisation continue avec de nombreux extrema locaux.

Pour plus de détails sur la définition de l'entropie croisée écrite sous la forme (6.2) voir [52]. Toutefois, cette définition de l'entropie croisée n'est pas universelle, par exemple dans [49] et [20] l'entropie croisée est définie comme suit :

$$H(\mathbb{P}, \tilde{\mathbb{P}}_\alpha) = - \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(X) \log(d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha) d\mathbb{P}. \quad (6.3)$$

Nous avons d'après (6.2) :

$$\begin{aligned} D(\mathbb{P}, \tilde{\mathbb{P}}_\alpha) &= \mathbb{E}_\alpha[\psi(X) \log L_\alpha(X)] \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(X) \log(\mathbb{P}[X = x]) \mathbb{P}[X = x] \\ &\quad - \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(X) \log(\tilde{\mathbb{P}}_\alpha[X = x]) \mathbb{P}[X = x]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

D'après [91], [89] et puisque le premier terme ne dépend pas de α , minimiser (6.4) revient à maximiser le seconde terme par rapport à α , nous avons alors :

$$\alpha_{opt} = \max_{\alpha} \mathbb{E} \left[\psi(X) \log d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha \right],$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\psi(X) \log d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha \right] &= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \log(\tilde{\mathbb{P}}_\alpha[X = x]) \mathbb{P}[X = x] \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \log \left(\prod_{i=1}^m \frac{p_{i,x_i} \hat{u}_{i,\alpha}(x_i)}{\hat{u}_{i,\alpha}^{\text{tot}}} \right) \mathbb{P}[X = x] \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \sum_{i=1}^m \left(\log p_{i,x_i} + \log(\alpha \hat{v}_i(x_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i)) - \log(\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}) \right) \mathbb{P}[X = x],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{v}_i(x_i) &= \hat{u}_{i+1}^{\text{mc}}(x_1, \dots, x_i) - \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i) \\
\hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i) &= \hat{u}_{i+1}^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_i) \\
\hat{v}_i^{\text{tot}} &= p_i \hat{v}_i(1) + q_i \hat{v}_i(0) \\
\hat{u}_i^{\text{mp,tot}} &= p_i \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1) + q_i \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0).
\end{aligned}$$

- Estimation de la dérivée de la distance *Kullback Leibler*

De la même manière que pour la recherche de l'optimum de la combinaison linéaire utilisant la minimisation de la variance donnée par (5.8), nous ferons appel à l'algorithme de Robbins-Monro pour chercher l'optimum de la combinaison linéaire en maximisant la distance de *Kullback Leibler* donnée par (6.4). Pour cela nous remplaçons dans (5.11) l'estimation de la dérivée de la variance $\widehat{V}'(\alpha)$ par la dérivée de la distance de *Kullback Leibler* $\mathbb{E} \left[\psi(X) \log d\tilde{\mathbb{P}}_\alpha \right]$ (en rajoutant un signe moins (-) avant a_k puisqu'on maximise), qui est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \{0,1\}^m} \psi(x) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{v}_i^{\text{tot}}}{\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}} - \frac{\hat{v}_i(x_i)}{\alpha \hat{v}_i(x_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(x_i)} \right) \mathbb{P}[X = x] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}_\alpha \left[\psi(X) L(X) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{v}_i^{\text{tot}}}{\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}} - \frac{\hat{v}_i(X_i)}{\alpha \hat{v}_i(X_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(X_i)} \right) \right]. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Notons cette quantité par D'_{KL} .

6.2.3 Approximation stochastique basée sur l'entropie croisée ou sur les différences finies centrées

l'algorithme permettant la recherche d'une approximation de α optimal et le calcul de l'estimateur de la défiabilité d'un graphe \mathcal{G} avec l'approximation

stochastique basée sur l'entropie croisée ou sur les différences finies centrées est identique à l'algorithme 6 : la première phase itérative, consiste à la recherche ou l'apprentissage du paramètre de la combinaison linéaire α ; il s'agit de déterminer une approximation du paramètre α qui minimise soit la variance (déterminée par les différences finies centrées) de l'estimateur de la défiabilité Z soit la distance de *Kullback Leibler*. Pour cela nous calculons à chaque itération k l'estimation de la dérivée de la variance $\hat{V}'(\alpha_k)$ exprimée par (6.1) ou la dérivée de la distance *Kullback Leibler* D'_{KL} exprimée par (6.5) pour une taille d'échantillon n_k relativement petite. Une fois l'approximation de α optimal obtenue dans la première phase, nous remplaçons dans la seconde phase α de la combinaison linéaire par α_{opt} pour le calcul de l'estimateur de la défiabilité \hat{u} du graphe \mathcal{G} avec N grand.

À chaque itération k dans la première phase de l'algorithme 6, l'estimation de la dérivée de la variance $\hat{V}'(\alpha_k)$ est obtenue par (KW) avec la variance en chaque point $\alpha - \xi$ et $\alpha_k + \xi$ est obtenue en moyennant n_k copies de $Z = \psi(X)L_{\alpha_k - \xi}(X)$ et $Z = \psi(X)L_{\alpha_k + \xi}(X)$ respectivement.

Dans la seconde phase nous calculons l'estimation de la défiabilité \hat{u} du graphe \mathcal{G} , en moyennant N copies indépendantes de la variable $Z = \psi(X)L_{\alpha_{opt}}(X)$ utilisant le paramètre $\hat{\alpha}_{opt}$ obtenu dans la première phase de la combinaison linéaire des deux approximations $\hat{u}_{i+1}^{mc}(\cdot)$ et $\hat{u}_{i+1}^{mp}(\cdot)$, l'estimation de la variance est donnée pour une seule variable $Z = \psi(X)L_{\alpha_{opt}}(X)$.

Dans le cas où nous adoptons l'approche basée sur l'entropie croisée pour l'approximation stochastique, nous utilisons dans l'algorithme 6 l'estimation de la dérivée de la distance de *Kullback Leibler* D'_{KL} au lieu de l'estimation de la dérivée de la variance $\hat{V}'(\alpha_k)$. Les autres étapes de l'algorithme 6 restent les mêmes. L'estimation de la dérivée de la distance de *Kullback Leibler* D'_{KL} est obtenue en moyennant n_k copies indépendantes de la quantité suivante :

$$\psi(X)L(X) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{v}_i^{\text{tot}}}{\alpha \hat{v}_i^{\text{tot}} + \hat{u}_i^{\text{mp,tot}}} - \frac{\hat{v}_i(X_i)}{\alpha \hat{v}_i(X_i) + \hat{u}_i^{\text{mp}}(X_i)} \right).$$

Bibliographie

- [1] J.A. Abraham. An improved algorithm for network reliability. *IEEE Trans. Reliab.*, 28 :58–61, 1979.
- [2] K.K. Aggarwal and S. Rai. Reliability evaluation in computer-communication networks. *IEEE Trans. Reliab.*, 30(1) :32–35, Apr 1981.
- [3] A. Agrawal and R.E. Barlow. A survey of network reliability and domination theory. *Op. Res.*, 32(3) :478–492, May-June 1984.
- [4] W.A. Al-Qaq, M. Devetsikiotis, and J.K. Townsend. Stochastic gradient optimization of importance sampling for efficient simulation of digital communication systems. *IEEE Trans. Communications*, 43 :2975–2985, 1995.
- [5] S. Asmussen and P. Glynn. Stochastic simulation : Algorithms and analysis. In *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996*. Springer-Verlag, New York, 2008.
- [6] S. Asmussen and P.W. Glynn. Stochastic simulation. *Springer-Verlag*, 2007.
- [7] A.O. Balan and L. Traldi. Preprocessing minpaths for sum of disjoint products. *IEEE Trans. Reliab.*, 52(3) :289–295, September 2003.
- [8] M.O. Ball. Complexity of network reliability computations. *Networks*, 10 :153–165, 1980.
- [9] M.O. Ball. Computational complexity of network reliability analysis : an overview. *IEEE Trans. Reliab.*, R-35(3) :230–239, August 1986.
- [10] M.O. Ball and J.S. Provan. The complexity of counting cuts and of computing the probability that graph is connected. *SIAM J. of Computing*, 12(4) :777–788, November 1983.
- [11] F. Beichlet and L. Spross. An improved abraham-method for generating disjoint sums. *IEEE Trans. Reliab.*, R-36(1) :70–74, Apr 1987.
- [12] R.G. Bennetts. Analysis of reliability block diagrams by boolean techniques. *IEEE Trans. Reliab.*, R-31(2) :159–166, Jun 1982.
- [13] N. K. Boots and P. Shahabuddin. Simulating GI/GI/1 queues and insurance processes with subexponential distributions. pages 656–665. Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, 2000.

- [14] J.A. Buzacott. The ording of terms in cut-based recursive disjoint products. *IEEE Trans. Reliab.*, R-32(5) :472–474, Dec 1983.
- [15] H. Cancela, M. Elkhadiri, and G. Rubino. Rare event analysis by monte carlo techniques in static models. In G. Rubino and B. Tuffin, editors, *Rare Event Simulation Using Monte Carlo Methods*, pages 145–170. Wiley, 2009. Chapter 7.
- [16] H. Cancela and M. El Khadiri. Series-parallel reductions in monte carlo network-reliability evaluation. *IEEE Trans. Reliab*, 47(2) :159–164, 1998.
- [17] H. Cancela, P. L’Ecuyer, M. Lee, G. Rubino, and B. Tuffin. Analysis and improvements of path-based methods for Monte Carlo reliability evaluation of static models. In S. Martorell J. Faulin, A. A. Juan and E. Ramirez-Marquez, editors, *Simulation Methods for Reliability and Availability of Complex Systems*. Springer Verlag, 2009.
- [18] H. Cancela, G. Rubino, and B. Tuffin. New measures of robustness in rare event simulation. pages 519–527. Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference, 2005.
- [19] C. J. Colbourn. *The combinatorics of network reliability*. Oxford University Press, new York, 1987.
- [20] P-T. De Boer, D.P. Kroese, S. Mannor, and R.Y. Rubinstein. A tutorial on the cross-entropy method. *Annals of Operations Research*, 134(1) :19–67, 2005.
- [21] M. Devetsikiotis and J.K. Townsend. An algorithmic approach to the optimization of importance sampling parameters in digital communication systems simulation. *IEEE Trans. Communications*, 41 :1464–1473, 1993.
- [22] M. Devetsikiotis and J.K. Townsend. Statistical optimization of dynamic importance sampling parameters for effecient simulation of communication networks. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 1 :293–305, 1993.
- [23] S. Dey and S. Juneja. Efficient estimation of density and probability of large deviations of sum of iid random variables. In J. Himmelspace K. P. White S. Jain, R. R. Creasey and M. Fu, editors, *Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference*, pages 3805–3816, 2005.
- [24] Edsger W. Dijkstra. A short introduction to the art of programming. pages 67–73, 1971.
- [25] L. Elie and B. Lapeyre. Introduction aux méthodes de monte-carlo. 2001.
- [26] M. ElKhadiri. *Evaluation directe et par simulation d’indice de fiabilité de réseaux de communication : Algorithmes séquentiels et dédiés à des architectures à mémoire distribuée*. PhD thesis, Université Rennes 1, Decembre 1992.

- [27] M. Evans and T. Swartz. Methods for approximating integrals in statistics with special emphasis on bayesian integration problems. *Statist. Sci.*, 10 :254–272, 1995.
- [28] W. Feller. *An Introduction To Probability Theory an Its Application*. Jonh Wiley and sons, 1973.
- [29] G.S. Fishman. *Principles of discrete Event Digital Simulation*. Jonh Wiley and Sons, new York, 1978.
- [30] G.S. Fishman. A coparison of four monte carlo methods for estimating the probability of s-t connectedness. *IEEE Trans. Reliab*, R-35(2), June 1986.
- [31] C.C. Fong and J.A. Buzacott. An algorithm for symbolic reliability computation with path-sets or cut-sets. *IEEE Trans. Reliab*, R-36(1) :34–37, Apr 1987.
- [32] L.R. Ford and D.R Fulkerson. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the hitchcock problem. *Rand Report Rand Corporation*, décembre 1955.
- [33] L. Fratta and U.G. Montanari. A boolean algebra method for cumputing the terminal reliability in a communication network. *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-20(3) :203–211, May 1973.
- [34] M.C Fu and J.Q. Hu. Conditional monte carlo : Gradient estimation and optimization applications. Boston : Kluwer, 1997.
- [35] J. Geweke. Bayesian inference in econometric models using monte-carlo integration. *Econometrica.*, 57(6) :1317–1339, 1989.
- [36] P. Glasserman. Gradient estimation via perturbation analysis. Boston : Kluwer, 1991.
- [37] P. W. Glynn and D. Iglehart. Importance sampling for stochastic simulations. *Management Science.*, 57(11) :1367–1392, 1989.
- [38] P.W. Glynn. Stochastic approximation for monte carlo optimization. In *Proceedings of the 1986 Winter Simulation Conference*, pages 356–365. IEEE Press, 1986.
- [39] P.W. Glynn. Likelihood ratio gradient estimation for stochastic systems. In *Communications of the ACM*, volume 33, pages 75–84, 1990.
- [40] P.W. Glynn and W. Whitt. The asymptotic effciecy of simulation estimators. *Operations Research*, 40(3) :505–520, 1992.
- [41] J. M. Hammersley and D. C. Handscomb. Monte carlo methods. *Methuen and Co*, 1965.
- [42] J.M. Hammersley and D.C. Handscomb. Monte carlo methods. Methuen, London, 1964.

- [43] P. Heidelberger. Fast simulation of rare events in queueing and reliability models. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 5(1) :43–85, 1995.
- [44] P. Heidelberger, P. Shahabuddin, and V.F. Nicola. Bounded relative error in estimating transient measures of highly dependable non-Markovian systems. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 4(2) :137–164, 1994.
- [45] K.D. Heidtmann. Statistical comparison of two sum-of-disjoint product algorithms for reliability and safety evaluation. In *In Proceedings 21st Intern.*, volume 2434, pages 70–81. Springer Verlag, LNCS, 2002.
- [46] K.D. Heidtmann. Inverting paths and cuts of 2-states systems. *IEEE Trans. Reliab.*, 32(5) :469–474, Dec 1983.
- [47] K. P. Hui, N. Bean, M. Kraetzel, and D. P. Kroese. The tree cut and merge algorithm for estimation of network reliability. *Prob. in Eng. and Inf. Sci.*, 17(1) :24–45, 2003.
- [48] K.P. Hui. *Network reliability estimation*. PhD thesis, The University of Adelaide, mars 2005.
- [49] F. Jelinek. Statistical method for speech recognition. *Massachusetts Institute of technology Press*, 1997.
- [50] C.H. Jun and S. Ross. System reliability by simulation : random hazard versus importance sampling. *Prob. in Eng. and Inf. Sci.*, 6 :119–311, 1992.
- [51] S. Juneja and P. Shahabuddin. Rare event simulation techniques : An introduction and recent advances. In S. G. Henderson and B. L. Nelson, editors, *Simulation*, Handbooks in Operations Research and Management Science, pages 291–350. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006. Chapter 11.
- [52] J.N. Kapur and H.K. Kesavan. Entropy optimization principales with applications. *Academic Press*, 1992.
- [53] R. Karp and M.G. Luby. A new monte carlo method for estimating the failure probability of an n-component system. Technical Report, Computer Science Division, University of California, Berkeley, 1983.
- [54] J. Keifer and J. Wolfowitz. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. *Annals of Mathematical Statics*, 23 :462–466, 1952.
- [55] S. Kim and S. G. Henderson. Adaptive control variates for finite-horizon simulation. *Mathematics of Operations Research*, 32 :508–527, 2006.
- [56] C. Kollman, K. Baggerly, D. Cox, and R. Picard. Adaptive importance sampling on discrete Markov chains. *Annals of Applied Probability*, 9(2) :391–412, 1999.

- [57] A. Konak. Combining network reduction and simulation to estimate network reliability. In *WSC*, pages 2301–2305, PA, USA, 2007. IEEE Computer Society Press.
- [58] H. Kumamoto, K. Tanaka, and K. Inoue. Efficient evaluation of system reliability by monte carlo method. *IEEE Transaction on Reliability*, R-26(5) :311–315, December 1977.
- [59] H. Kumamoto, K. Tanaka, K. Inoue, and E.J. Henley. Dagger-sampling monte carlo for system unavailability evaluation. *IEEE Transaction on Reliability*, R-29(2), June 1980.
- [60] H. J. Kushner and G. G. Yin. *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [61] P. L’Ecuyer, J.H. Blanchet, B. Tuffin, and P.W. Glynn. Asymptotic robustness of estimators in rare-event simulation. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 20(1) :Article 6, 2010.
- [62] P. L’Ecuyer, M. Mandjes, and B. Tuffin. Importance sampling and rare event simulation. In G. Rubino and B. Tuffin, editors, *Rare Event Simulation Using Monte Carlo Methods*, pages 17–38. Wiley, 2009. Chapter 2.
- [63] P. L’Ecuyer, G. Rubino, S. Saggadi, and B. Tuffin. Approximate zero-variance importance sampling for static network reliability estimation. *IEEE Trans. Reliab.*, R-60(3) :590–604, September 2011.
- [64] P. L’Ecuyer and B. Tuffin. Approximate zero-variance simulation. In *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*, pages 170–181. IEEE Press, 2008.
- [65] M.O. Locks. Recent developments in computing of system-reliability. *IEEE Transaction on Reliability*, 34(5) :425–436, Dec 1985.
- [66] M.O. Locks. A minimising algorithm for sum of disjoint products. *IEEE Transaction on Reliability*, 36(4) :445–453, Oct 1987.
- [67] C. Lucet. *Méthodes de décomposition pour l’évaluation de la fiabilité des réseaux*. PhD thesis, Université de technologie de compiegne, 1993.
- [68] T. Luo and K.S. Trivedi. An improved algorithm for coherent-system reliability. *IEEE Transaction on Reliability*, 47 :73–78, 1998.
- [69] K.B. Misra. An algorithm for the reliability evaluation of redundant networks. *IEEE Trans. Reliab.*, 19(4) :146–151, November 1970.
- [70] E.F. Moore and C.E. Shannon. Reliable circuit using less reliable relays. *J. Franklin Inst.*, 262 :191–208, 1956.
- [71] M. K. Nakayama. General conditions for bounded relative error in simulations of highly reliable Markovian systems. *Advances in Applied Probability*, 28 :687–727, 1996.

- [72] P. Shahabuddin P. Glasserman, P. Heidelberger and T. Zajic. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities. *Operations Research*, 47(4) :585–600, 1999.
- [73] L. Page and J. Perry. A note on computing environments and network reliability. *Microelectronics and Reliability*, 31(1) :185–6, 1991.
- [74] G. Ch. Pflug. Stochastic minimization with constant step size : Asymptotic laws. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24 :655–666, 1986.
- [75] T. Politof and A. Satyanarayana. Efficient algorithms for reliability analysis of planar networks - a survey. *IEEE Trans. Reliab.*, 35(3) :252–259, August 1986.
- [76] V. Tech R. Pasupathy and S. Kim. The stochastic root finding problem/overview solutions, and open questions. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 21 :1558–1195, 2011.
- [77] S. Rai and K.K. Aggarwal. An efficient method for reliability evaluation of a general network. *IEEE Transaction on Reliability*, R-27(3) :206–211, Aug 1978.
- [78] S. Rai, M. Veeraraghavan, and K. S. Trivedi. A survey of efficient reliability computation using disjoint products approach. *Networks Journal*, 25(3) :147–163, 1995.
- [79] L. Resende. Implementation of a factoring algorithm for reliability evaluation of undirected networks. *IEEE Trans. Reliab.*, 37(5) :462–468, December 1988.
- [80] M. Resende. A program for reliability evaluation of undirected networks via polygon-to-chain reductions. *IEEE Trans. Reliab.*, 35(1) :24–9, 1986.
- [81] H. Robbins and S. Monro. A stochastic approximation method. *Annals of Mathematical Statics*, 22 :400–407, 1951.
- [82] C. P. Robert and G. Casella. Monte carlo statistical methods. *Springer*, 2nd edn, 2004.
- [83] A. Rosenthal. Computing the reliability of complex networks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 32 :384–393, 1977.
- [84] S. Ross. A new simulation estimator of system reliability. *Applied Mathematics and stochastic analysis*, 3 :331–336, 1994.
- [85] G. Rubino. Network reliability evaluation. In K. Bagchi and J. Walrand, editors, *The state-of-the art in performance modeling and simulation*. Gordon and Breach Books, 1998. Chapter 11.
- [86] G. Rubino and B. Tuffin. *Simulation et méthodes de Monte Carlo*, t.i. edition, Oct 2007. AF 600.

- [87] R.Y. Rubinstein. Sensivity analysis of discrete event systems by the "push-out" method. *Annals of Operations Research*, 39 :229–237, 1992.
- [88] R.Y. Rubinstein. Optimization of computer simulation models with rare events. *European Journal of Operations Research*, 99 :89–112, 1997.
- [89] R.Y. Rubinstein. The cross-entropy method for combinatorial and continuous optimization. *Methodology and Computating in Applied Probability*, 2 :127–190, 1999.
- [90] R.Y. Rubinstein. Rare event simulation via cross entropy and importance sampling. In *seconde international Workshop on Rare Event Simulation, RESIM*, 99 :1–17, 1999.
- [91] R.Y. Rubinstein. Cross-entropy and rare events for maximal cut and partition problems. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 12(1) :27–53, 2002.
- [92] R.Y. Rubinstein and D.P. Kroese. The cross-entropy method : A unified approach to combinatorial optimization, monte-carlo simulation, and machine learning. *Springer-Verlag*, 2004.
- [93] R.Y. Rubinstein and B. Melamed. Modern simulation and modeling. *Wiley*, 1998.
- [94] D. Ruppert. Stochastic approximation. In B.K. Ghosh and eds. P. K. Sen, editors, *Handbook of Sequential Analysis*, pages 503–529. Marcel Dekker, New York, 1991.
- [95] A. Rushdi. How to hand-check a symbolic reliability expression. *IEEE Transaction on Reliability*, R-32(5) :402–408, Dec 1983.
- [96] A. Satyanarayana. A unified formula for the analysis of some network reliability problems. *IEEE Trans. Reliab.*, R-31(1) :23–32, December 1982.
- [97] A. Satyanarayana and J.N. Hagstrom. A new algorithm for the reliability analysis of multi-terminal networks. *IEEE Trans. Reliab.*, R-30(4) :325–334, October 1981.
- [98] A. Satyanarayana and A. Prabhakar. New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of comples networks. *IEEE Trans. Reliab.*, R-27 :82–100, June 1978.
- [99] A. Satyanarayana and R.K Wood. A linear-time algorithm for computing k-terminal in series-parallel networks. *SIAM J. Comput.*, 14(4) :818–832, November 1985.
- [100] W.G. Schneeweiss. Disjoint boolean products via shannon's expansion. *IEEE Transaction on Reliability*, R-33(4) :329–332, Oct 1984.
- [101] R. Sedgewick and M. Schidlowsky. *Algorithms in Java, Part 5 : Graph Algorithms*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2003.

- [102] P. Shahabuddin. Importance sampling for the simulation of highly reliable Markovian systems. *Management Science*, 40(3) :333–352, 1994.
- [103] J. C. Spall. Adaptive stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45 :1839–1853, 2000.
- [104] J. C. Spall. *Introduction To Stochastic and optimization*. John Wiley & Sons Inc., new jersey, USA, 2003.
- [105] IEEE standard computer dictionary. a compilation of iee standard computer glossaries. IEEE Computer Society Press, New York, NY, USA, January 1991.
- [106] Y. Su and M. Fu. Importance sampling in derivative securities pricing. In *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*, pages 587–596. IEEE Press, 2000.
- [107] R. Terruggia. *Reliability Analysis of Probabilistic Networks*. PhD thesis, Università degli Studi di Torino, Gennaio 2010.
- [108] O. Theologou. *Contribution à l'évaluation de la fiabilité des réseaux*. PhD thesis, Université de technologie de compiegne, 1990.
- [109] R.K. Tiwari and M. Verma. An algebraic technique for reliability evaluation. *IEEE Transaction on Reliability*, R-29(4) :311–313, Oct 1980.
- [110] B. Tuffin. *Modélisation mathématique pour la conception, l'analyse quantitative et le controle de la qualité de service des systèmes*. PhD thesis, Université Rennes 1-INRIA, 10 avril 2006.
- [111] B. Tuffin. Robustness properties in simulations of highly reliable systems. Bamberg, Germany, 2006. Proceedings of RESIM.
- [112] B. Tuffin. Bounded normal approximation in highly reliable markovian systems. publication interne 1050, Irisa, octobre 1996.
- [113] L.G. Valiant. The complexity of enumeration and reliability problems. *SIAM J. Comput*, 8 :410–421, 1979.
- [114] R. VanSlyke and H. Frank. Networks reliability analysis. *Networks*, 1 :279–290, 1972.
- [115] F. Vazquez-abad and D. Dufresne. Accelerated simulation for pricing asian options. In *Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference*, pages 1493–1500. IEEE Press, 1998.
- [116] M. Veeraraghavan and K. Trivedi. An improved algorithm for the symbolic reliability analysis of networks. *IEEE Transactions on Reliability*, 40 :347–358, 1991.
- [117] G. Yin and K. Yin. Passive stochastic approximation with constant step size and window width. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :90–106, 1996.

Table des figures

1.1	Graphe non orienté.	16
1.2	Chemins minimaux du graphe non orienté de la figure 1.1.	17
1.3	Coupes minimales du graphe non orienté de la figure 1.1.	18
1.4	Graphe avec <i>2-terminaux</i> en gris.	20
1.5	Graphe avec <i>tous-terminaux</i> en gris.	21
1.6	Graphe avec <i>K-terminaux</i> avec $ \mathcal{K} = 3$	21
3.1	Graphe avec quatre arcs.	50
3.2	Graphe avec trois arcs.	54
3.3	Coupes minimales à probabilité maximales du graphe de la figure 3.2.	55
3.4	Graphe de transitions de la chaîne de Markov pour l'exemple 4.	56
3.5	Graphe avec quatre arcs.	57
3.6	Graphe non orienté ou bidirectionnel.	58
3.7	Graphe avec quatres arcs, $\mathcal{K} = \{A, B, C, D\}$	60
3.8	Graphe avec quatres arcs, et les quatre nœuds doivent être connectés.	63
3.9	Dodécaèdre	64
3.10	Trois dodécaèdres en parallèle.	66
3.11	Trois dodécaèdres en série.	66
4.1	Signification des nœuds.	70
4.2	Remplacement parallèle.	70
4.3	Remplacement série.	71
4.4	Réduction parallèle.	71
4.5	Réduction série, $w \notin \mathcal{K}$	72
4.6	Réduction de degré 2, $u, v, w \in \mathcal{K}$	72
4.7	Graphe sp-réductible.	73
4.8	Graphe sp-complexe.	74
4.9	État du réseau "Arpanet" avant réductions.	74
4.10	État du réseau "Arpanet" suite aux réductions série-parallèle.	75
4.11	Graphe avec cinq arcs.	77
4.12	Graphe $G_1(1)$	79
4.13	Réduction série du graphe $G_1(1)$	79

4.14	Graphe $G_1^r(1)$.	79
4.15	Graphe $G_1(0)$.	80
4.16	Réduction série du graphe $G_1(0)$.	80
4.17	Réduction parallèle du graphe $G_1(0)$.	80
4.18	Graphe $G_1^r(0)$.	80
4.19	Graphe $G_{1,1}$.	85
4.20	Réduction série du graphe $G_1(1)$.	85
4.21	Graphe $G_{1,1}^r$.	85
4.22	Graphe $G_{1,0}$.	86
4.23	Réduction série du graphe $G_{1,0}$.	86
4.24	Réduction parallèle du graphe $G_{1,0}$.	86
4.25	Graphe $G_{1,0}^r$.	86
4.26	Graphe avec cinq arcs.	91
4.27	Dodécaèdre	93
4.28	Trois dodécaèdres en série.	95
4.29	Trois dodécaèdres en parallèle.	96
5.1	Graphe avec r lignes parallèles entre s et t .	102
5.2	Graphe avec cinq arcs	106
5.3	L'erreur relative obtenue par les différentes méthodes d'échantillonnage préférentiel pour l'exemple de la figure 5.1, par rapport au nombre de ligne r .	116
5.4	Graphe constitué de deux lignes entre s et t , chaque ligne contient m arcs.	117
5.5	Graphe avec une ligne constituée de m arcs.	119
5.6	Dodécaèdre.	121
5.7	Trois dodécaèdres en série.	123
5.8	Trois dodécaèdre en parallèle.	125

Liste des tableaux

3.1	Défiabilités et leurs approximations <i>CoupeMin-ProbaMax</i> pour l'exemple 6.	59
3.2	Probabilités originales et modifiées des 16 configurations x pour lesquelles $\psi(x) = 1$, pour l'exemple 6.	60
3.3	Probabilités originales et modifiées pour les 11 configurations x pour lesquelles $\psi(x) = 1$, pour l'exemple 7.	61
3.4	Résultats numériques pour l'exemple 8, pour $N = 5 \times 10^4$, avec quatre valeur de ϵ .	63
3.5	Résultats empiriques pour l'exemple 9, avec $N = 5 \times 10^4$ et quatre différentes valeurs de ϵ .	64
3.6	Résultats numériques pour l'exemple 10, avec $N = 5 \times 10^4$, et quatre valeurs de ϵ .	65
3.7	Résultats empiriques pour l'exemple 11, avec $N = 5 \times 10^4$, et quatre valeurs de ϵ .	65
3.8	Résultats empiriques pour l'exemple 12, avec $N = 5 \times 10^4$, et quatre valeurs de ϵ .	67
4.1	Résultats empiriques de la topologie de la figure 4.26, obtenus par l'approximation <i>CoupeMin-ProbaMax</i> , <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> .	92
4.2	Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> pour la topologie de la figure 4.26.	92
4.3	Résultats empiriques de la topologie de la figure 4.27, obtenus par l'approximation <i>CoupeMin-ProbaMax</i> , <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> .	94
4.4	Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> pour la topologie de la figure 4.27.	94
4.5	Résultats empiriques de la topologie de la figure 5.7, obtenus par l'approximation <i>CoupeMin-ProbaMax</i> , <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> .	95
4.6	Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> pour la topologie de la figure 5.7.	96
4.7	Résultats empiriques de la topologie de la figure 4.29, obtenus par l'approximation <i>CoupeMin-ProbaMax</i> , <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> .	97

4.8	Nombre moyen des réductions série-parallèle par réalisation obtenu par <i>RSPP</i> et <i>RSPA</i> pour la topologie de la figure 4.29.	97
5.1	Résultats empiriques pour l'exemple de la figure 5.1, avec $N = 5 \times 10^4$, pour différentes valeurs de r , et q choisi pour que \hat{u} est approximativement égale à 10^{-8} avec l'approximation <i>CoupeMin-ProbaMax</i>	103
5.2	Résultats empiriques pour l'exemple de la figure 5.1, avec $N = 5 \times 10^4$, pour différentes valeurs de r et q	107
5.3	Estimation de la défiabilité de graphe de la figure 5.1.	116
5.4	Estimation des défiabilités $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ du graphe donné par la figure 5.4.	117
5.5	Estimation de la défiabilité du graphe donné par la figure 5.4. . .	118
5.6	Estimation des défiabilités $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ du graphe de la figure 5.5.	119
5.7	Estimation de la défiabilité du graphe de la figure 5.5.	120
5.8	Estimation des défiabilités $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ du dodécaèdre représenté par la figure 5.6.	120
5.9	Estimation de la défiabilité du dodécaèdre représenté par la figure 5.6.	122
5.10	Estimation des défiabilités $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ des trois dodécaèdres en série.	123
5.11	Estimation de la défiabilité des trois dodécaèdres en série.	124
5.12	Estimation des défiabilités $\hat{u}^{mc}(\emptyset)$ et $\hat{u}^{mp}(\emptyset)$ des trois dodécaèdres en parallèle.	125
5.13	Estimation de la défiabilité des trois dodécaèdres en parallèle. . .	126

Liste des algorithmes

1	Algorithme séquentiel de l'échantillonnage préférentiel avec un estimateur à variance nulle approché.	39
2	Algorithme d'échantillonnage préférentiel basé sur <i>CoupeMin- ProbaMax</i>	48
3	Algorithme de combinaison réduction série-parallèle postérieure-échantillonnage préférentiel.	78
4	Algorithme de combinaison réduction série-parallèle anticipée-échantillonnage préférentiel	84
5	Phases d'échantillonnage préférentiel adaptatif	108
6	L'algorithme d'approximation stochastique pour estimer α_{opt} basée sur la minimisation de la variance	114

